MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
MÜNSTER

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJER G. H. HARDY †
G. HERGLOTZ H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS W. THRELFALL H. WEYL

51. BAND 5. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 30. DEZEMBER 1948)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1949

Math.
Z.

Differentialgeometrie des isotropen Raumes, V. Zur Theorie der Eilinien.

Von

K. Strubecker in Karlsruhe.

Inhaltsübersicht.

I. Einleitung 525
II. Die parataktische Abbildung der Flächenelemente E des isotropen Raumes auf die Punktepaare (E_l, E_r) der Ebene 526
III. Die parataktische Abbildung von Kurvenstreifen 531
IV. Isotrope Differentialgeometrie der Kurvenstreifen 534
V. Differentialgeometrie der parataktischen Streifenbilder 538
VI. Der Vierscheitelsatz der relativen Differentialgeometrie 543
VII. Verallgemeinerung des Vierscheitelsatzes auf Paare flächengleicher Eilinien 547
VIII. Verallgemeinerung des Vierscheitelsatzes auf Paare isometrischer, umfangsgleicher Eilinien 548
IX. Eilinien und Flächen der festen isotropen Relativkrümmung $K = rt - s^2 = -1$ 554
X. Das Übertragungsprinzip der Elementenschwenkung 559
XI. E. Study's Schwenkungsverfahren. Anwendung auf Eilinien. Gleichdicke und Zindler-Kurven 564
XII. Räumliche Ableitung zweier kennzeichnender Eigenschaften des Kreises 571

I. Einleitung.

Man kennt in der Ebene eine Reihe von Theoremen aus der Gruppe der Vierscheitelsätze, welche sich auf die Krümmungsverhältnisse von Paaren von Eilinien beziehen. Der Vierscheitelsatz der relativen Differentialgeometrie ist das bekannteste Beispiel dafür. Im folgenden wird gezeigt, daß es mittels der Methoden der isotropen Differentialgeometrie möglich ist, Theoreme der genannten Art aus räumlichen Vierscheitelsätzen über Kurvenstreifen zu gewinnen.

Darüber hinaus führe ich zu jeder Eilinie c eine bemerkenswerte Fläche Φ der festen isotropen Relativkrümmung $K = rt - s^2 = -1$ ein, die c als Rückkehrkante hat und sich periodisch über der Ebene von c erhebt, durch deren isotrope Differentialgeometrie es gelingt, ebene Probleme um die Eilinie c auf isotrop-räumlichen Wege zu lösen. Um hier nur ein Beispiel der dabei auftretenden interessanten Übertragungen anzuführen, sei erwähnt, daß etwa der bekannte räumliche

Satz von JOACHIMSTHAL *über die ebenen Krümmungslinien einer Fläche* Φ in der Ebene den folgenden Satz (von E. SALKOWSKI) über Eilinien liefert:

„Kann man in einer Eilinie (ohne Mittelpunkt) eine Sehne so herumführen, daß zwei der folgenden Eigenschaften erfüllt sind: 1. Die Sehne hat feste Länge, 2. sie schneidet feste Bogenstücke ab, 3. sie schneidet feste Flächenstücke ab, so gilt auch die dritte Eigenschaft".

Weiter wird die altbekannte Geometrie der Kurven fester Breite (Gleichdicke) durch ein hier räumlich gewonnenes, in der Ebene schon von E. STUDY benütztes Übertragungsverfahren mit der eigentlich erst in den letzten Jahren entwickelten Theorie der sogenannten ZINDLER-kurven (= Kurven mit einer Schar von Flächen- und Umfangshalbierenden Sehnen fester Länge) in Beziehung gesetzt. Das zugehörige räumliche Verfahren der „Elementenschwenkung" hat insbesondere für die isotrope Differentialgeometrie der PFAFFschen Mannigfaltigkeiten von Flächenelementen (anholonomen Flächen des isotropen Raumes) Bedeutung, der eine spätere Arbeit dieser Reihe gewidmet sein wird.

Das in der Arbeit laufend benutzte geometrische *Übertragungsprinzip* besteht in der sogenannten *parataktischen Abbildung* des isotropen Raumes, durch welche die *Punktepaare* (E_l, E_r) *der Ebene* auf die *Flächenelemente* E *des isotropen Raumes* abgebildet werden. Zur Bequemlichkeit des Lesers ist einleitend kurz über diese Abbildung und über einige später notwendige Tatsachen und Formeln aus der isotropen Differentialgeometrie[1]) berichtet worden, so daß die Arbeit ohne weiteres für sich allein lesbar ist.

II. Die parataktische Abbildung der Flächenelemente E des isotropen Raumes auf die Punktepaare (E_l, E_r) der Ebene.

1. Die Bewegungsgruppe des isotropen Raumes. Cliffordscher Parallelismus. Parataxie. Als *Geometrie des isotropen Raumes* erklären wir im Sinne von F. KLEIN die Invariantentheorie der sechsgliedrigen Gruppe G_6

$$(1) \qquad G_6 \begin{cases} x' = a + x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = b + x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = c + c_1 x + c_2 y + z \end{cases}$$

[1]) Ausführliche und allgemeine Entwicklungen der genannten Gegenstände enthalten meine unter dem gemeinsamen Obertitel *„Differentialgeometrie des isotropen Raumes"* erschienenen früheren Arbeiten: I. Theorie der Raumkurven. Sitz. Ber. Akad. Wiss. Wien, Abt. II a, **150** (1941), S. 1—53. — II. Die Flächen konstanter Relativkrümmung $K = rt - s^2$. Math. Zeitschr. **47** (1942), S. 743—777. — III. Flächentheorie. Math. Zeitschr. **48** (1942), S. 369—427. — IV. Theorie der flächentreuen Abbildungen der Ebene. Math. Zeitschr. **50** (1944), S. 1—92. — Die Ent-

von projektiven Automorphien des Ferngeradenpaares

$$(2)\qquad \begin{cases} t = 0 \\ x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

das als *absolutes Geradenpaar* unseres isotropen Raumes fungiert. Wir bezeichnen die Transformationen der Gruppe (1) als die *Bewegungen* des isotropen Raumes; sie äußern sich im Grundriß (Normalriß auf die x, y-Ebene) als gewöhnliche ebene Bewegungen. Das isotrope *Bogenelement* ds hat daher die Form

$$(3)\qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 = \mathrm{I}.$$

Der isotrope Raum wird also beherrscht von jener (einfachsten) Riemannschen Metrik, welche sich im Grundriß als die gewöhnliche Euklidische Metrik äußert. Z. B. kann der isotrope Winkel zweier Vektoren direkt ihrem Grundrisse entnommen werden, insonderheit sind im isotropen Sinne normale Raumvektoren solche, deren Grundrisse normal sind.

In der Gruppe G_6 ist für $\varphi = 0$ invariant die fünfgliedrige Gruppe G_5 der isotropen *Grenzbewegungen* enthalten, welche sich im Grundriß als ebene Parallelverschiebungen äußern. Durch sie werden die Flächenelemente $E(x, y, z, p, q)$ des isotropen Raumes in einfachtransitiver Weise untereinander vertauscht.

Man kann die Grenzgruppe G_5 darstellen als das kommutative Produkt zweier dreigliedriger isotroper Schiebungsgruppen S_l^3, S_r^3

$$(4)\qquad G_5 = S_l^3 . S_r^3 = S_r^3 . S_l^3,$$

nämlich der Gruppen der

$$(5)\qquad \begin{array}{ll} \text{Linksschiebungen} & \text{Rechtsschiebungen} \\ S_l^3\begin{cases} x' = \alpha + x \\ y' = \beta \quad\ + y \\ z' = \gamma - \beta x + \alpha y + z \end{cases} & S_r^3\begin{cases} x' = \alpha + x \\ y' = \beta \quad\ + y \\ z' = \gamma + \beta x - \alpha y + z. \end{cases} \end{array}$$

Diese Schiebungen sind im isotropen Raume ein Gegenstück der Cliffordschen Schiebungen des elliptischen und quasielliptischen Raumes. Die Bahnen ihrer eingliedrigen Untergruppen sind geradlinig und bilden parabolische Strahlnetze der Gleichungen

$$(6)\qquad \left\| \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ p_{01} & p_{02} & p_{03} + p_{12} \end{matrix} \right\| = 0 \qquad \left\| \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ p_{01} & p_{02} & p_{03} - p_{12} \end{matrix} \right\| = 0.$$

---

wicklung der algebraischen und gruppentheoretischen Eigenschaften der parataktischen Abbildung ist in meiner Note „Über die parataktische Abbildung der Flächenelemente des Raumes auf die Punktepaare einer Ebene" Crelles Journ. f. r. u. a. Math. **186**, Heft 3 (1945) S. 1—36 enthalten.

Über die Gegenstände der vorliegenden Note habe ich im Jänner 1944 in Freiburg (Br.) und im Juli 1944 in Heidelberg vorgetragen.

2. Parataxien und parataktische Abbildung. Ähnlich den gewöhnlichen Parallelverschiebungen vermitteln auch diese isotropen CLIFFORD-schen Schiebungen *eine Art von Parallelismus* zwischen je ∞^3 Flächenelementen des isotropen Raumes, die wir als *Parataxie* bezeichnen. Genauer wollen wir sagen:

Satz 1. *Linksparataktische Flächenelemente des isotropen Raumes sind solche, welche durch Rechtsschiebung auseinander entstehen, rechtsparataktisch aber sollen solche Flächenelemente heißen, welche durch Linksschiebungen zusammenhängen.*

Diese Parataxien geben zu einer *parataktischen Abbildung* der Flächenelemente $E(x, y, z, p, q)$ des isotropen Raumes zunächst auf die Paare von Flächenelementen E_l, E_r der Bildebene π

$$\pi \ldots z = 0 \tag{7}$$

Anlaß durch die Forderung, daß E_l aus E durch Rechtsschiebung S_r hervorgehe, also zu E linksparataktisch sei, während E_r aus E durch Linksschiebung S_l entsteht, also zu E rechtsparataktisch ist. Man kann die Flächenelemente E_l, E_r in π umkehrbareindeutig durch ihre Punkte gleichen Namens ersetzen und erhält so die folgenden *Formeln* für die *parataktische Abbildung der Flächenelemente* $E(x, y, z, p, q)$ *des isotropen Raumes auf die Punktepaare* $E_l(x_l, y_l)$, $E_r(x_r, y_r)$ *der Ebene* π*:*

$$E_l \begin{cases} x_l = x + q \\ y_l = y - p \end{cases} \qquad E_r \begin{cases} x_r = x - q \\ y_r = y + p \end{cases} \tag{8}$$

oder umgekehrt

$$E \begin{cases} x = \dfrac{x_l + x_r}{2} & p = \dfrac{y_r - y_l}{2} \\ y = \dfrac{y_l + y_r}{2} & q = \dfrac{x_l - x_r}{2} \\ z = \text{beliebig.} \end{cases} \tag{9}$$

Diese Abbildung ist unempfindlich gegen Translationen in z-paralleler (vollisotroper) Richtung. E_l heißt das linke, E_r das rechte parataktische Bild des Flächenelementes E.

Aus (9) folgt

Satz 2. *Der Grundriß* $\overline{E}(x, y)$ *des Flächenelementes* E *ist der Mittelpunkt der beiden parataktischen Bildpunkte:*

$$\overline{E} = \frac{E_l + E_r}{2}. \tag{10}$$

3. Gruppentheoretische und elementare Eigenschaften der parataktischen Abbildung. Aus der Definition der parataktischen Abbildung folgt unmittelbar (Fig. 1):

Satz 3. *Bei einer Rechtsschiebung* S_r *des isotropen Raumes bleiben die linken Bilder* E_l *der Flächenelemente* E *in Ruhe, während die rechten*

Bilder E_r eine Translation $2\mathfrak{R}$ erfahren, unter $\mathfrak{R}$ die Grundrißwirkung der Rechtsschiebung S_r verstanden. Umgekehrt bleiben bei einer Linksschiebung S_l die rechten Bilder E_r in Ruhe, während die linken Bilder eine Translation $2\mathfrak{L}$ erfahren, unter $\mathfrak{L}$ die Grundrißwirkung von S_l verstanden.

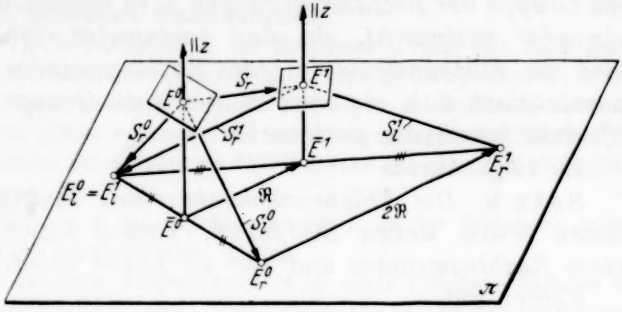

Fig. 1.

Die Gruppe $G_6 = S_l^3 . S_r^3$ der Grenzbewegungen des isotropen Raumes bildet sich daher parataktisch auf die Gruppe G_4 der simultanen Translationen des linken und rechten Bildfeldes ab.

Ferner gilt

Satz 4. *Eine allgemeine isotrope Bewegung (1) äußert sich in den parataktischen Bildern als Paar simultaner gleichwinkeliger Drehungen.*

Zwei von einander unabhängige simultane Drehungen der beiden Bildfelder sind dagegen das parataktische Abbild einer isotropen Lie*schen Kugeltransformation, d. h. einer Berührungstransformation, welche die isotropen Kugeln*

$$z = \frac{A}{2}(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D \tag{11}$$

d. h. die Flächen zweiter Ordnung durch das absolute Geradenpaar (2) untereinander vertauscht.

Die parataktische Abbildung liefert ein *Übertragungsprinzip*, das für die Geometrie des isotropen Raumes vor allem deshalb von Bedeutung ist, weil es die *metrischen Invarianten des isotropen Raumes* durch die *elementaren Invarianten der beiden Bildfelder* auszudrücken gestattet. Z. B. wird die Differentialgeometrie der Kurvenstreifen c des isotropen Raumes auf die elementare Differentialgeometrie der aufeinander bezogenen Kurvenpaare (c_l, c_r) der Ebene π übertragen.

Trägt man in die Inzidenzrelation

$$dz = p\,dx + q\,dy \tag{12}$$

die von E_l bzw. E_r stammenden Werte von p und q ein, so erhält man als die Mannigfaltigkeiten der Flächenelemente E des isotropen Raumes, deren linker bzw. rechter Bildpunkt $E_l(x_l, y_l)$ bzw. $E_r(x_r, y_r)$ *fest* ist, die Flächenelemente der

Linksgewinde $\mathfrak{G}_l$	Rechtsgewinde $\mathfrak{G}_r$
$dz = -(x\,dy - y\,dx) - y_l\,dx + x_l\,dy$,	$dz = (x\,dy - y\,dx) + y_r\,dx - x_r\,dy$.

(13)

welche zwei involutorische Gewindebündel bilden. Ihre isotrope Beweglichkeit ist erstaunlich groß, nämlich viergliedrig. Insbesondere gilt der

Satz 5. *Die Flächenelemente jedes Linksgewindes $\mathfrak{G}_l$ werden durch die Gruppe der Rechtsschiebungen S_r^3 in einfach-transitiver Weise untereinander vertauscht, sie sind zueinander linksparataktisch. Ebenso sind die Flächenelemente jedes Rechtsgewindes $\mathfrak{G}_r$ zueinander rechtsparataktisch d. h. sie werden durch die Gruppe der Linksschiebungen S_l^3 einfach-transitiv vertauscht.*

Es folgt daraus

Satz 6. *Die Flächenelemente eines Linksgewindes und nur sie haben festen linken Bildpunkt; ebenso haben die Flächenelemente eines Rechtsgewindes und nur sie festen rechten Bildpunkt.*

Ferner gilt

Satz 7. *Das Nullsystem eines Linksgewindes äußert sich im linken parataktischen Bildfelde als die Spiegelung an seinem festen linken Bildpunkte, während die rechten Bilder unberührt bleiben. Entsprechend wirkt sich das Nullsystem eines Rechtsgewindes im rechten Bildfelde als Spiegelung an seinem festen rechten Bildpunkte aus, während das linke Bildfeld unberührt bleibt.*

Ist

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases}\Big\} \bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{x}}(s) \qquad \begin{cases} p = p(s) \\ q = q(s) \end{cases}\Big\} \bar{\bar{\mathfrak{x}}} = \bar{\bar{\mathfrak{x}}}(s) \tag{14}$$

der Schmiegstreifen einer Raumkurve $\mathfrak{x}(s)$, so entspricht dem isotropen Bogenelemente (3) in der *metrischen Dualität* des isotropen Raumes der Kontingenzwinkel $d\sigma$ ihrer Schmiegebenen

$$d\sigma^2 = dp^2 + dq^2. \tag{15}$$

Bezeichnet

$$\varkappa = [\bar{\mathfrak{x}}'\bar{\mathfrak{x}}''] = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \tag{16}$$

die isotrope *Krümmung* und

$$\tau = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{[\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\mathfrak{x}''']}{[\bar{\mathfrak{x}}'\bar{\mathfrak{x}}'']^2} = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2} \tag{17}$$

die isotrope *Torsion* der Raumkurve $\mathfrak{x}(s)$, so ist $\frac{1}{\tau}$ metrisch dual zu τ. Da die Nullsysteme der Gewinde (13) jede metrische Größe in eine wertegleiche duale Größe überführen, folgt

Satz 8. *Die in den Links- bzw. Rechtsgewinden (13) enthaltenen Gewindekurven (und nur sie) haben die konstante isotrope Torsion* $\tau = -1$ *bzw.* $\tau = +1$.

Wir fügen noch einige elementare Bemerkungen an:

Bemerkung 1. Die Flächenelemente E der *Bildebene* π (und alle dazu parallelen Flächenelemente) haben *zusammenfallende parataktische Bildpunkte* $E_l = E_r$

Bemerkung 2. Die Flächenlemente E einer *beliebigen* (nichtisotropen, d. h. nicht zur z-Achse parallelen) *Ebene* γ haben zwei *schiebungskongruente Bildfelder*: denn jede solche Ebene γ kann durch isotrope Cliffordsche Schiebung in die Bildebene π übergeführt werden.

Bemerkung 3. Spiegelt man ein Flächenelement E an der Bildebene π, so vertauschen sich seine beiden parataktischen Bilder.

Bemerkung 4. Der isotrope *Neigungswinkel* ϑ eines Flächenelementes E gegen die Bildebene π ist gleich dem halben Abstande seiner beiden parataktischen Bilder:

$$\vartheta^2 = p^2 + q^2 = \left(\frac{E_l E_r}{2}\right)^2. \tag{18}$$

Bemerkung 5. Die Flächenelemente E einer *isotropen Kugel* (11) haben parataktische Bilder E_l, E_r welche durch *Drehung* um den festen Winkel α zusammenhängen, wobei

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = A \tag{19}$$

ist. Das *Drehungszentrum* fällt dabei mit dem identischen Bildpaar jenes Flächenelementes der Kugel zusammen, welches zur Bildebene parallel ist.

III. Die parataktische Abbildung von Kurvenstreifen.

4. Allgemeine Eigenschaften. Irgend zwei aufeinander bezogene Kurven $c_l \to c_r$ können (einmal stetige Differenzierbarkeit vorausgesetzt) stets als parataktische Bilder eines Kurvenstreifens des isotropen Raumes aufgefaßt werden. Es ist nämlich, wenn die Koordination der Bildpaare $E_l(x_l, y_l)$ und $E_r(x_r, y_r)$ als Funktionen eines Parameters t gegeben sind, durch die aus (9) fließenden Gleichungen

$$\mathfrak{x}(t)\begin{cases} x = \dfrac{x_l + x_r}{2} & p = \dfrac{y_r - y_l}{2} \\ y = \dfrac{y_l + y_r}{2} & q = \dfrac{x_l - x_r}{2} \\ z = \displaystyle\int_{t_0}^{t} p\,dx + q\,dy \end{cases} \tag{20}$$

der Streifen vollkommen (bis auf vollisotrope d. h. z-parallele Schiebungen eindeutig) festgelegt.

Man kann das letzte Integral zum Teil ausführen und findet eine einfache *elementargeometrische Konstruktion der Streifenkurve* $\mathfrak{x}(t)$ aus den beiden parataktischen Bildkurven $\mathfrak{x}_l(t)$ und $\mathfrak{x}_r(t)$. Setzt man

nämlich in das Integral für p, q, dx und dy ihre Werte aus (20) ein, so erhält man

$$z = \tfrac{1}{4}\int_{t_0}^{t} [(y_r\,dx_l + x_l\,dy_r) - (x_r\,dy_l + y_l\,dx_r) + (x_l\,dy_l - y_l\,dx_l) - (x_r\,dy_r - y_r\,dx_r)]$$

$$= \tfrac{1}{4}[x_l y_r - x_r y_l]_{t_0}^{t} + \tfrac{1}{4}\int_{t_0}^{t}(x_l\,dy_l - y_l\,dx_l) - \tfrac{1}{4}\int_{t_0}^{t}(x_r\,dy_r - y_r\,dx_r),$$

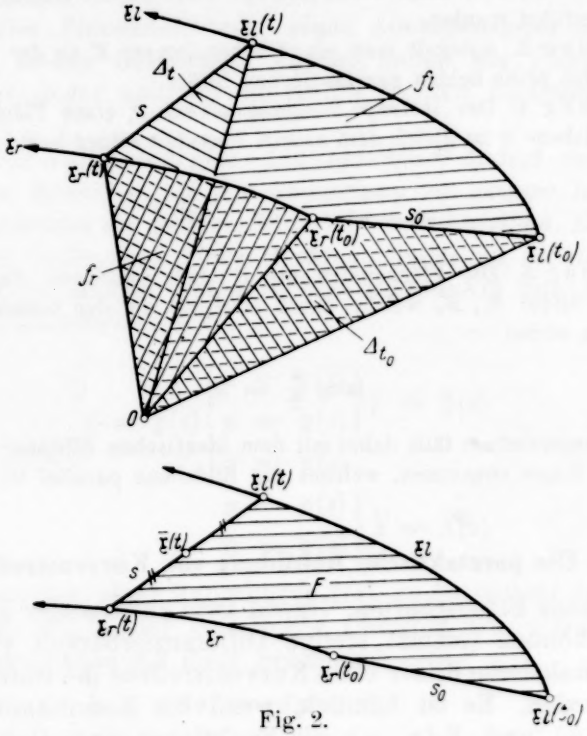

Fig. 2.

das heißt (vgl. Fig. 2):

$$z = \tfrac{1}{2}(\Delta_t - \Delta_{t_0} + f_l - f_r) = \tfrac{1}{2}F, \tag{21}$$

wenn Δ_{t_0} und Δ_t die Flächen der Dreiecke $(O, \mathfrak{x}_l(t_0), \mathfrak{x}_r(t_0))$ und $(O, \mathfrak{x}_l(t), \mathfrak{x}_r(t))$ bedeuten, und f_l bzw. f_r die Flächen der Kurvensektoren $(O, \mathfrak{x}_l(t_0), \mathfrak{x}_l(t))$ bzw. $(O, \mathfrak{x}_r(t_0), \mathfrak{x}_r(t))$. Es ist also z insgesamt gleich der halben Fläche F des Sektors, der einerseits begrenzt wird von den beiden parataktischen Bildkurven $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$, andererseits von der Anfangssehne s_0, welche die Anfangspunkte $\mathfrak{x}_l(t_0)$ und $\mathfrak{x}_r(t_0)$ verbindet, und der Endsehne s, welche die Endpunkte $\mathfrak{x}_l(t)$ und $\mathfrak{x}_r(t)$ verbindet. Es folgt daraus

Satz 9. *Um die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ des Streifens zu konstruieren, dessen parataktische Bilder zwei aufeinander bezogene vorgegebene Kurven*

$\mathfrak{x}_l(t), \mathfrak{x}_r(t)$ *sind, wähle man eine beliebige Anfangssehne* s_0, *welche zwei zusammengehörige Punkte* $\mathfrak{x}_l(t_0)$ *und* $\mathfrak{x}_r(t_0)$ *verbindet; trägt man dann im Mittelpunkte* $\bar{\mathfrak{x}}(t) = \frac{\mathfrak{x}_l(t) + \mathfrak{x}_r(t)}{2}$ *der variablen Endsehne* $s = [\mathfrak{x}_l(t), \mathfrak{x}_r(t)]$ *in der z-Richtung als Höhe die halbe Fläche* $\frac{1}{2} F$ *des durch die Sehne zwischen* $\mathfrak{x}_l$ *und* $\mathfrak{x}_r$ *überstrichenen Sektors auf, so erhält man die gesuchte Streifenkurve.*

Von Bedeutung ist für uns der Sonderfall, wo die beiden parataktischen Bildkurven $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ des Streifens *geschlossen* und *periodisch aufeinander bezogen* sind, d. h., wo

$$\mathfrak{x}_l(t+\tau) = \mathfrak{x}_l(t), \quad \mathfrak{x}_r(t+\tau) = \mathfrak{x}_r(t) \tag{22}$$

ist. Ist F_l die Fläche der linken, F_r die Fläche der rechten Bildkurve, so wird sich bei jedem Umlauf der beiden Bildkurven die Höhe z um den konstanten Wert

$$\boxed{h = \frac{F_l - F_r}{2}} \tag{23}$$

vergrößern. Es folgt

Satz 10. *Zu zwei geschlossenen und periodisch aufeinander bezogenen Bildkurven* $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ *gehört im isotropen Raume ein Streifen, der sich periodisch über der Mittenkurve*

$$\bar{\mathfrak{x}} = \frac{\mathfrak{x}_l + \mathfrak{x}_r}{2} \tag{24}$$

der Zuordnung $\mathfrak{x}_l \to \mathfrak{x}_r$ *erhebt und dessen Ganghöhe* h *nach* (23) *gleich ist der halben Differenz der Flächeninhalte der Kurven* $\mathfrak{x}_l$ *und* $\mathfrak{x}_r$.

Der Streifen ist daher stets dann und nur dann ebenfalls geschlossen, wenn seine beiden (geschlossenen und periodisch aufeinander bezogenen) Bildkurven flächengleich ($F_l = F_r$) *sind.*

5. Einige Beispiele werden für uns von besonderer Bedeutung sein.

Beispiel 1. Artet eine der beiden parataktischen Bildkurven, z. B. $\mathfrak{x}_l$ in einen festen Punkt E_l aus, so sind alle Flächenelemente E des Streifens zueinander linksparataktisch und liegen in einem bestimmten Linksgewinde $\mathfrak{G}_l$ (Satz 6), der Streifen selber aber ist (nach Satz 8) Schmiegstreifen einer Kurve der festen Torsion $\tau = -1$ (Gewindekurve aus $\mathfrak{G}_l$). Entsprechendes gilt für Schmiegstreifen der festen Torsion $\tau = +1$, deren rechtes Bild $\mathfrak{x}_r$ punktförmig ist.

Aus Satz 10 folgt, daß eine solche Gewindekurve dann und nur dann geschlossen ist, wenn ihre nicht punktförmige parataktische Bildkurve eine geschlossene Linie mit verschwindender Fläche ist.

Beispiel 2. Fallen die parataktischen Bildkurven $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ Punkt für Punkt zusammen ($\mathfrak{x}_l = \mathfrak{x}_r$), so liegt der ebene Schmiegstreifen einer Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_l = \mathfrak{x}_r$ der Bildebene π vor.

Sind die Bildkurven $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ aber schiebungskongruent, so stellen sie einen ebenen Schmiegstreifen in einer von π verschiedenen nichtisotropen Ebene γ dar.

Beispiel 3. Allgemeiner sind zwei *drehungskongruente Kurven* $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ die parataktischen Bilder eines *sphärischen Streifens*, der geschlossen ist, wenn $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ geschlossen sind.

Beispiel 4. Haben die Bild*paare* $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ der Flächenelemente eines Streifens *feste Spanne* $\mathfrak{x}_l \mathfrak{x}_r = \text{const.}$, so liegt ein isotroper *Böschungsstreifen* vor; seine Flächenelemente haben gegen die Bildebene π feste Neigung ϑ, die durch Formel (18) gegeben ist.

Beispiel 5. Insbesondere erhält man die parataktischen Bilder $\mathfrak{x}_l$, $\mathfrak{x}_r$ der *Böschungsstreifen durch eine ebene Kurve* $\mathfrak{x}$ *der Bildebene* π als *Äquitangentialenpaar von* $\mathfrak{x}$, indem man auf den Tangenten der Kurve $\mathfrak{x}$ vom Berührungspunkt weg nach beiden Seiten den konstanten Betrag der isotropen Böschung ϑ abträgt.

Beispiel 6. Sind die beiden Bildkurven $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ zueinander *zentrisch symmetrisch*, so gehen die Flächenelemente des Streifens durch einen festen Punkt X; es liegt ein *Elementarkegel* vor, das duale Gegenstück eines ebenen Schmiegstreifens (vgl. Beispiel 2).

IV. Isotrope Differentialgeometrie der Kurvenstreifen.

6. Die isotrope Kurventheorie. Nach unserem parataktischen Übertragungsprinzip ist zu erwarten, daß sich die isotrope Differentialgeometrie der Kurvenstreifen in der elementaren Differentialgeometrie der Paare ihrer parataktischen Bildkurven spiegelt. Um diese Verhältnisse genügend verfolgen zu können, bedarf es zunächst einer gewissen Kenntnis der isotropen Kurventheorie.

Gehen wir aus von der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ des Streifens

$$\left.\begin{aligned} x &= x(s) \\ y &= y(s) \\ z &= \int p\,dx + q\,dy \end{aligned}\right\} \mathfrak{x}(s) \qquad \left.\begin{aligned} p &= p(s) \\ q &= q(s) \end{aligned}\right\} \bar{\mathfrak{x}}(s). \tag{25}$$

s ist ihr isotroper Bogen, $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ der Grundriß ihres Ortsvektors $\mathfrak{x}(s)$, $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ der Grundriß des *sphärischen Bildes*

$$\mathfrak{x}(s) \begin{cases} X = p(s) \\ Y = q(s) \\ Z = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \end{cases} \tag{26}$$

des Streifens auf der isotropen *Einheitskugel*

$$z = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2), \tag{27}$$

das durch *parallele Tangentenebenen* erzeugt wird.

Das *begleitende Dreibein der Kurve* wird gebildet von ihrem *Tangentenvektor*

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{x}' = (x', y', z' = p x' + q y'), \tag{28}$$

dessen isotrope Länge eins ist:

$$\bar{\mathfrak{t}}^2 = \bar{\mathfrak{x}}'^2 = x'^2 + y'^2 = 1, \tag{29}$$

ferner von dem dazu normalen *Hauptnormalenvektor* $\mathfrak{h}$, der mittels der isotropen Krümmung $\varkappa$ (16) von $\mathfrak{x}(s)$ durch die Formel

$$\mathfrak{x}'' = \mathfrak{t}' = \varkappa\mathfrak{h} = (x'', y'', z'') \tag{30}$$

definiert ist, endlich von dem zu $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{h}$ normalen konstanten vollisotropen *Binormalenvektor*

$$\mathfrak{b} = (0, 0, 1). \tag{31}$$

Bezeichnet τ die isotrope Torsion (17) der Raumkurve, so besteht für dieses Dreibein als Gegenstück der FRENETschen Formeln das System *der Ableitungsgleichungen der isotropen Kurventheorie*

$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{t}' &= \varkappa\mathfrak{h} \\ \mathfrak{h}' &= -\varkappa\mathfrak{t} + \tau\mathfrak{b} \\ \mathfrak{b}' &= 0. \end{aligned}} \tag{32}$$

Aus ihm folgt insbesondere

$$\mathfrak{x}'' = \varkappa\mathfrak{h}\begin{cases} x'' = -\varkappa y' \\ y'' = \varkappa x' \\ z'' = (p'x' + q'y') - \varkappa(py' - qx'). \end{cases} \tag{33}$$

7. Die isotrope Streifentheorie. In der Tangentenebene ε des Streifens liegt normal zur Kurventangente $\mathfrak{t}$ der Vektor der isotropen *Streifennormalen* $\mathfrak{y}$, der durch die Formel

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{h} - \vartheta\mathfrak{b} \tag{34}$$

als isotroper Einheitsvektor erklärt werden kann, wobei ϑ die isotrope Neigung der Streifenebene ε gegen die Schmiegebene σ der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ bedeutet. Zur Berechnung von ϑ bemerken wir, daß erstens $\mathfrak{y}$ der Streifenebene ε angehört, also (weil $\varkappa\bar{\mathfrak{y}} = \varkappa\bar{\mathfrak{h}} = \bar{\mathfrak{x}}''$ ist)

$$\varkappa\mathfrak{y} = (x'', y'', px'' + qy'') \tag{35}$$

sein muß, während zweitens nach (34) auch

$$\varkappa\mathfrak{y} = \varkappa\mathfrak{h} - \varkappa\vartheta\mathfrak{b} = (x'', y'', (px'' + qy'') + (p'x' + q'y') - \varkappa\vartheta)$$

sein muß. Der Vergleich der beiden Formeln ergibt die wichtige Gleichung

$$\boxed{\varkappa\vartheta = p'x' + q'y'.} \tag{36}$$

Aus (35) folgt noch für die Streifennormale $\mathfrak{y}$ die Darstellung

$$\mathfrak{y} = (-y', x', qx' - py'). \tag{37}$$

Die Größe $\varkappa\vartheta$ ist die eine der drei isotropen Grundinvarianten des Streifens, nämlich seine sogenannte *isotrope Normalkrümmung*. Wir

schreiben

$$\varkappa\vartheta = \frac{1}{R} = \frac{dp\,dx + dq\,dy}{ds^2} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} \tag{38}$$

und nennen R den isotropen *Normalkrümmungsradius* des Streifens. Man kann R deuten als Parameter der isotropen *Meusnierschen Kugel* des Streifens, d. h. jener isotropen Oskulationskugel der Kurve $\mathfrak{x}(s)$, welche zugleich die Streifenebene ε berührt. Die Formel (36) oder (38) enthält dabei das isotrope Gegenstück des *Satzes von Meusnier*.

Man kommt zur isotropen Normalkrümmung auch, wenn man für das *begleitende Dreibein des Streifens*, das aus den Vektoren $\mathfrak{t}, \mathfrak{y}, \mathfrak{b}$ besteht, mittels (32) die Ableitungsformeln aufstellt. Es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}' &= \quad \varkappa\mathfrak{y} + \varkappa\vartheta\mathfrak{b} \\ \mathfrak{y}' &= -\varkappa\mathfrak{t} \quad + (\tau - \vartheta')\mathfrak{b} \\ \mathfrak{b}' &= \quad \mathfrak{o}. \end{aligned} \tag{39}$$

Hierin treten die drei isotropen Grundinvarianten des Streifens auf, nämlich

$$\begin{cases} a = \tau - \vartheta', & \text{die isotrope } \textit{geodätische Windung}, \\ b = \varkappa\vartheta, & \text{die isotrope } \textit{Normalkrümmung}, \\ c = \varkappa, & \text{die isotrope } \textit{geodätische Krümmung}. \end{cases} \tag{40}$$

Man findet ausführlich noch

$$a = \tau - \vartheta' = [\mathfrak{x}'\mathfrak{y}\mathfrak{y}'] = \begin{vmatrix} x' & y' \\ p' & q' \end{vmatrix} \tag{41}$$

oder

$$a = q'x' - p'y' = \frac{dq\,dx - dp\,dy}{ds^2} = \frac{\mathrm{IV}}{\mathrm{I}}. \tag{42}$$

Das Verschwinden der isotropen Normalkrümmung bzw. geodätischen Windung ist geometrisch leicht zu deuten. Bestimmen wir zu diesem Zwecke den Vektor $\mathfrak{e}(\xi, \eta, \zeta)$ der *Schnittrichtung benachbarter Tangentenebenen* des Streifens. Es ist für sie die Inzidenzrelation und ihre Ableitung erfüllt, d. h.

$$\begin{aligned} \xi &= p\xi + q\eta \\ 0 &= p'\xi + q'\eta \end{aligned}$$

also

$$\mathfrak{e} = (\xi, \eta, \zeta) = (q', -p', pq' - qp'). \tag{43}$$

Diese zur Kurventangente $\mathfrak{t}$ *konjugierte Tangentenrichtung* $\mathfrak{e}$ des Streifens kann aus den Vektoren $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{y}$ linear abgeleitet werden; es ist

$$\mathfrak{e} = a\mathfrak{t} - b\mathfrak{y}. \tag{44}$$

Aus dieser Formel folgt:

Satz 11. *$a = 0$ oder* IV $= 0$ *ist notwendig und hinreichend dafür, daß* $\mathfrak{e} = \mathfrak{y}$ *wird, d. h. dafür, daß die konjugierten Streifentangenten* $\mathfrak{t}$ *und* $\mathfrak{e}$ *zueinander normal sind.* $a = 0$ *oder* IV $= 0$ *kennzeichnet also die isotropen Krümmungsstreifen.*

$b = 0$ oder II $= 0$ *ist notwendig und hinreichend dafür, daß* $\mathfrak{e} = \mathfrak{t}$ *wird, d. h. dafür, daß die konjugierten Streifentangenten* $\mathfrak{t}$ *und* $\mathfrak{e}$ *zusammenfallen.* $b = 0$ *oder* II $= 0$ *kennzeichnet also, die Schmiegstreifen.*

Nach der Formel (41) ändert sich die geodätische Windung $a = \tau - \vartheta'$ eines Streifens nicht, wenn man seine Berührungsebenen ε um die darin liegenden Kurventangenten $\mathfrak{t}$ durch konstante isotrope Winkel ϑ^* dreht, d. h. ϑ um die Konstante ϑ^* vemehrt. Für Krümmungsstreifen ($a = 0$) folgt daraus der

Satz 12. (Satz von Joachimsthal.) *Im isotropen Raume folgt aus zweien der folgenden Eigenschaften die dritte: 1. Der Neigungswinkel ϑ^*, den zwei Streifen S_1 und S_2 durch dieselbe Kurve $\mathfrak{x}(s)$ miteinander bilden, ist konstant; 2. Der erste Streifen S_1 ist ein Krümmungsstreifen; 3. Der zweite Streifen S_2 ist ein Krümmungsstreifen.*

8. Das sphärische Bild des Streifens. Die Formel von Rodrigues und ein Gegenstück dazu. Man kann die Schmiegstreifen und die isotropen Krümmungsstreifen auch mittels ihrer isotropen sphärischen Bilder (26) kennzeichnen. Man findet nämlich aus (26) für den Tangentenvektor $\mathfrak{T} = \mathfrak{X}'(s)$ des sphärischen Bildes $\mathfrak{X}(s)$ des Streifens (25) den Vektor

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{X}' = (p', q', p\,p' + q\,q'); \tag{45}$$

daraus folgt für das *Bogenelement dS des sphärischen Bildes*

$$dS^2 = dp^2 + dq^2 = \text{III}. \tag{46}$$

Ferner ergibt sich im Vergleich mit (43) der

Satz 13. *Der Tangentenvektor $\mathfrak{X}'$ des sphärischen Bildes $\mathfrak{X}(s)$ ist stets normal zu dem Vektor $\mathfrak{e} = a\mathfrak{t} - b\mathfrak{y}$, nach welchem sich benachbarte Tangentenebenen des Streifens schneiden.*

Für isotrope Krümmungsstreifen ($a = 0$) folgt, daß $\mathfrak{y} \perp \mathfrak{X}'$ das heißt

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{x}' \parallel \mathfrak{X}'$$

ist.

Für Schmiegstreifen ($b = 0$) folgt, daß $\mathfrak{t} \perp \mathfrak{X}'$ das heißt

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{h} \parallel \mathfrak{X}'$$

ist.

Es gelten daher in diesen beiden Fällen Gleichungen der folgenden Arten:

1. Für Krümmungsstreifen:

$$\mathfrak{X}' = \lambda\mathfrak{x}'$$

2. Für Schmiegstreifen:

$$\mathfrak{X}' = \lambda\mathfrak{h}.$$

Zur Bestimmung des skalaren Faktors λ ziehen wir die vektorielle Darstellung der

Normalkrümmung (36 und 38) heran. Es ist

$$(47) \qquad b = \frac{1}{R} = (\bar{\mathfrak{x}}' \bar{\mathfrak{X}}')$$

geodätischen Windung (41) heran. Es ist **wegen** $\vartheta = 0$

$$a = \tau = [\bar{\mathfrak{x}}' \bar{\mathfrak{X}}']$$

also, wenn wir für $\mathfrak{X}'$ die obigen Werte einsetzen

$$\frac{1}{R} = \lambda \bar{\mathfrak{x}}'^2 = \lambda$$

d. h.

$$(48) \qquad \boxed{\mathfrak{X}' = \frac{1}{R} \mathfrak{x}'}$$

Dies ist die *Formel von* RODRIGUES *für isotrope Krümmungsstreifen.*

$$\tau = [\bar{\mathfrak{t}}, \lambda \bar{\mathfrak{y}}] = \lambda [\bar{\mathfrak{t}}, \bar{\mathfrak{y}}] = \lambda$$

d. h.

$$\boxed{\mathfrak{X}' = \tau \mathfrak{y}.}$$

Dies ist das *Gegenstück zur Formel von* RODRIGUES *für Schmiegstreifen.*

Für *Koordinaten* ausführlich angeschrieben lauten diese wichtigen Formeln nach (45) und (33)

$$(49) \qquad \begin{cases} p' = \frac{1}{R} x' \\ q' = \frac{1}{R} y'. \end{cases} \qquad \begin{cases} p' = -\tau y' \\ q' = \tau x'. \end{cases}$$

Die nichtangeschriebenen Formeln für die dritte Koordinate von $\mathfrak{X}'$ sind eine Folge davon.

Bemerkung. Man kann die auf *Schmiegstreifen* bezügliche Formel (48 rechts) durch Übergang zu den normalen Vektoren

$$(50) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{y}' &= |\mathfrak{X}' = (-q', p', -p q' + q p') \quad \text{und} \\ -\mathfrak{x}' &= |\mathfrak{y} = (-x', -y', -p x' - q y') \end{aligned}$$

auch in der Form

$$(51) \qquad \boxed{\mathfrak{y}' = -\tau \mathfrak{x}'}$$

schreiben. Der Vektor

$$(52) \qquad \bar{\mathfrak{y}} = (-q, p)$$

kann dabei z. B. als der *Spurvektor der Tangentenebene* (Schmiegebene) des Streifens auf der Bildebene π oder als der um $+\frac{\pi}{2}$ *geschwenkte Grundrißvektor des sphärischen Bildvektors* $\mathfrak{X}$ gedeutet werden.

V. Differentialgeometrie der parataktischen Streifenbilder.

9. Schmiegstreifen. Wir sind nun in der Lage, die isotropen differentiellen Eigenschaften der Streifen auf elementare differentielle Eigenschaften ihrer parataktischen Bildkurven zu übertragen. Es seien also

nach (8) die beiden Kurven

$$(53)\qquad \mathfrak{x}_l \begin{cases} x_l = x(s) + q(s) \\ y_l = y(s) - p(s) \end{cases} \qquad \mathfrak{x}_r \begin{cases} x_r = x(s) - q(s) \\ y_r = y(s) + p(s) \end{cases}$$

die parataktischen Bilder des (allgemeinen) Streifens (25). Es folgt

$$(54)\qquad d\mathfrak{x}_l \begin{cases} dx_l = dx + dq \\ dy_l = dy - dp \end{cases} \qquad d\mathfrak{x}_r \begin{cases} dx_r = dx - dq \\ dy_r = dy + dp, \end{cases}$$

Formeln, die wir mit Rücksicht auf (43) auch in der vektoriellen Gestalt

$$(55)\qquad \boxed{\mathfrak{x}_l' = \bar{\mathfrak{x}}' + \bar{\mathfrak{e}},\quad \mathfrak{x}_r' = \bar{\mathfrak{x}}' - \bar{\mathfrak{e}}}$$

zusammenfassen können. Wir berechnen das Außenprodukt

$$(56)\qquad \boxed{\tfrac{1}{2}[d\mathfrak{x}_l\, d\mathfrak{x}_r] = dp\,dx + dq\,dy = \mathrm{II};}$$

es verschwindet dann und nur dann, wenn die Bildkurven durch *parallele Tangenten* auf einander bezogen sind; der Streifen ist dann wegen $\mathrm{II} = 0$ ein *Schmiegstreifen*. Also gilt

Satz 14. *Durch die parataktische Abbildung wird ein räumlicher Schmiegstreifen auf ein parallelbezogenes Kurvenpaar $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ übertragen und umgekehrt.*

Bemerkung 1. Eine der beiden parallelbezogenen Bildkurven kann dabei in einen festen Punkt E_l oder E_r ausarten. Der Schmiegstreifen liegt dann in einem Links- oder Rechtsgewinde.

Da für *Schmiegstreifen* nach Nr. **8**.

$$(57)\qquad \vartheta = 0,\quad a = \tau - \vartheta' = \tau,\quad b = \varkappa\vartheta = 0,\quad p' = -\tau y,\quad q' = \tau x'$$

ist, kann man die Tangentenrichtungen $\mathfrak{x}_l', \mathfrak{x}_r'$ der parallelbezogenen Bildkurven des *Schmiegstreifens* nach (54) in der Form

$$(58)\qquad \boxed{\mathfrak{x}_l' = (1+\tau)\bar{\mathfrak{x}}',\quad \mathfrak{x}_r' = (1-\tau)\bar{\mathfrak{x}}'}$$

schreiben.

In dem Sonderfalle, wo $\tau = \tau_0 = \text{konst.}$ ist, folgt daraus durch Integration

$$(59)\qquad \mathfrak{x}_l = (1+\tau_0)\bar{\mathfrak{x}} - \bar{\mathfrak{a}},\quad \mathfrak{x}_r = (1-\tau_0)\bar{\mathfrak{x}} + \bar{\mathfrak{a}}.$$

Darin steckt der

Satz 15. *Die beiden parataktischen Bilder $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ eines Schmiegstreifens der festen Torsion τ_0 sind zueinander zentrisch ähnliche Kurven, die aus dem Kurvengrundrisse $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ durch die zentrischen Ähnlichkeiten der Moduln $(1+\tau_0)$ und $(1-\tau_0)$ hervorgehen. Das Zentrum der Ähnlichkeit ist dabei der Nullpunkt N der Bildebene π bezüglich des Gewindes*

$$(60)\qquad dz = \tau_0(x\,dy - y\,dx) + A\,dx + B\,dy,$$

in welchem der Schmiegstreifen von $\mathfrak{x}(s)$ als Nullstreifen enthalten ist.

Bemerkung 2. Für $\tau_0 = \pm 1$ erhält man nach Nr. 5 wieder den in Bemerkung 1 besprochenen Sonderfall.

Wir wollen als Anwendung von (58) sofort die wichtige Frage beantworten, nach dem *isotropen Kennzeichen jener Schmiegstreifen, deren parataktische Bildkurven* $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ *gleichsinnig parallel-bezogene Eilinien* (geschlossene konvexe Kurven) sind. Nach (58) ist notwendig und hinreichend für *Gleichsinnigkeit* der Tangenten $\mathfrak{x}_l'$ und $\mathfrak{x}_r'$, daß

$$(1+\tau)(1-\tau) = 1-\tau^2 > 0$$

d. h.

$$\boxed{-1 < \tau < +1} \tag{61}$$

ist. Da die *Mittenkurve*

$$\bar{\mathfrak{x}} = \frac{\mathfrak{x}_l + \mathfrak{x}_r}{2} \tag{62}$$

der Bildkurven, über der sich nach Satz 10 der Schmiegstreifen $\mathfrak{x}(s)$ periodisch mit der Ganghöhe (23) erhebt, dann nach (58) auf $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ *ebenfalls durch gleichsinnig parallele Tangenten bezogen* ist, also alle drei Kurven gleiche Kontingenzwinkel $d\varphi$ haben, erhält man für die Krümmungen von $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r, \bar{\mathfrak{x}}$ die Formeln

$$\varkappa = \frac{d\varphi}{ds}, \qquad \varkappa_l = \frac{d\varphi}{ds_l}, \qquad \varkappa_r = \frac{d\varphi}{ds_r}, \tag{63}$$

unter ds_l, ds_r die *Bogenelemente der Bildkurven* $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ verstanden, für die sich aus (58) ergibt

$$\boxed{ds_l = (1+\tau)\,ds, \quad ds_r = (1-\tau)\,ds.} \tag{64}$$

Also hängen die Krümmungen (63) durch die Formeln

$$\boxed{\varkappa_l = \frac{\varkappa}{1+\tau}, \quad \varkappa_r = \frac{\varkappa}{1-\tau}} \tag{65}$$

zusammen. Aus $\infty > \varkappa > 0$ folgt somit unter der Voraussetzung (61), daß auch $\infty > \varkappa_l > 0$ und $\infty > \varkappa_r > 0$ ist. Also gilt insgesamt der

Satz 16. *Soll der Schmiegstreifen einer Kurve* $\mathfrak{x}(s)$ *des isotropen Raumes zwei gleichsinnig parallel bezogene Eilinien* $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ *als parataktische Bildkurven haben, so muß er sich*

1. periodisch über der Eilinie $\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{x}}(s)$ *mit der beschränkten nichtverschwindenden (z. B. positiven) Krümmung* $(\infty > \varkappa > 0)$ *erheben und*

2. muß seine Torsion τ *der Ungleichung* $-1 < \tau < +1$ *genügen.*

Diese Bedingungen sind notwendig und hinreichend. Der Schmiegstreifen ist geschlossen, wenn die beiden Bildkurven flächengleich sind.

Aus (65) folgen noch die Formeln

$$\boxed{\varkappa = \frac{2\,\varkappa_l \varkappa_r}{\varkappa_l + \varkappa_r}, \quad \tau = \frac{\varkappa_r - \varkappa_l}{\varkappa_r + \varkappa_l};} \tag{66}$$

auch sie enthalten eine einfache Deutung der isotropen Invarianten des Schmiegstreifens mittels der elementaren Invarianten seiner beiden parataktischen Bildkurven. Sie enthalten u. a. auch den elementaren

Satz 17. *Die Mittenkurve* $\bar{\mathfrak{x}}$ *zweier aufeinander durch gleichsinnig parallele Tangenten bezogenen Eilinien beschränkter positiver Krümmung* $(\infty > \varkappa_l, \varkappa_r > 0)$ *ist stets wieder eine Eilinie beschränkter positiver Krümmung* $(\infty > \varkappa > 0)$.

10. Isotrope Krümmungsstreifen. Wir berechnen nun die *Bogenelemente* ds_l, ds_r *der parataktischen Bildkurven* (53) des allgemeinen Streifens (25) und finden aus (54)

$$ds_l^2 = dx_l^2 + dy_l^2 = (dx^2 + dy^2) + (dp^2 + dq^2) + 2(dq\,dx - dp\,dy),$$
$$ds_r^2 = dx_r^2 + dy_r^2 = (dx^2 + dy^2) + (dp^2 + dq^2) - 2(dq\,dx - dp\,dy)$$

oder unter Heranziehung der Grundformen I, III, IV der isotropen Streifentheorie

$$\boxed{\begin{aligned} ds_l^2 &= \mathrm{I} + \mathrm{III} + 2\,\mathrm{IV} \\ ds_r^2 &= \mathrm{I} + \mathrm{III} - 2\,\mathrm{IV}. \end{aligned}} \tag{67}$$

Da IV $= 0$ die isotropen Krümmungsstreifen kennzeichnet, folgt

Satz 18. *Für einen isotropen Krümmungsstreifen und nur für einen solchen sind die beiden parataktischen Streifenbilder* $\mathfrak{x}_l$ *und* $\mathfrak{x}_r$ *aufeinander isometrisch bezogen* $(s_l = s_r)$.

Außer ihren Krümmungen $\varkappa_l$ und $\varkappa_r$ besitzen zwei isometrische ebene Kurven $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ noch den Schnittwinkel 2ω ihrer Tangenten

$$2\omega = \widehat{\mathfrak{x}_l' \mathfrak{x}_r'} \tag{68}$$

als elementare Invariante gegen simultane gleichwinkelige Bewegungen. Also wird es nach dem parataktischen Übertragungsprinzip gelingen, durch diese drei elementaren Invarianten $\varkappa_l$, $\varkappa_r$ und ω die isotropen Invarianten des zugehörigen isotropen Krümmungsstreifens auszudrücken, nämlich seine geodätische Krümmung $\varkappa$ (d. i. auch die Krümmung der Mittenkurve $\bar{\mathfrak{x}}$ der isometrischen Kurven $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$) und seine Normalkrümmung $b = \varkappa\vartheta = \frac{1}{R}$.

In der Tat folgt für Krümmungsstreifen aus $a = \tau - \vartheta' = 0$ zunächst nach (44)

$$\bar{\mathfrak{e}} = a\bar{\mathfrak{t}} - b\bar{\mathfrak{y}} = -\varkappa\vartheta\bar{\mathfrak{h}}$$

und aus (55) für die Tangentenvektoren der isometrischen Bildkurven

$$\mathfrak{x}_l' = \bar{\mathfrak{t}} - \varkappa\vartheta\bar{\mathfrak{h}}, \quad \mathfrak{x}_r' = \bar{\mathfrak{t}} + \varkappa\vartheta\bar{\mathfrak{h}}. \tag{69}$$

Daraus findet man für den Schnittwinkel 2ω der Tangenten

$$\sin 2\omega = \frac{[\mathfrak{x}_l' \mathfrak{x}_r']}{|\mathfrak{x}_l'| \cdot |\mathfrak{x}_r'|} = \frac{2\varkappa\vartheta}{1 + \varkappa^2\vartheta^2}, \quad \cos 2\omega = \frac{(\mathfrak{x}_l' \mathfrak{x}_r')}{|\mathfrak{x}_l'| \cdot |\mathfrak{x}_r'|} = \frac{1 - \varkappa^2\vartheta^2}{1 + \varkappa^2\vartheta^2}$$

Zur Theorie der Tschebyscheffschen Polynome.

Von

P. Heuser in Darmstadt*).

Es sei $\mathfrak{U}_x$ eine einfach zusammenhängende Umgebung des Punktes ∞ in der x-Ebene mit mindestens zwei Randpunkten. Die Funktion

$$x = \psi(t) = t + a_0 + \frac{a_1}{t} + \cdots \tag{1}$$

bilde das Kreisäußere $|t| > r_0$ konform auf $\mathfrak{U}_x$ ab. Die Zahlen $a_0, a_1, \ldots$ und r_0 sind dadurch eindeutig festgelegt. Es kann durch eine Parallelverschiebung $x - a_0 = x'$ immer erreicht und daher von vornherein angenommen werden, daß $a_0 = 0$ ist. Es sei $r_0 < r < \infty$; das durch die Abbildung (1) in der x-Ebene hergestellte Bild des Kreises $|t| = r$ bezeichnen wir mit C_r.

Zu jeder Kurve C_r und zu jedem n gehört ein Tschebyscheffsches Polynom $t_n(r; x)$, das durch die folgenden Eigenschaften eindeutig bestimmt ist:

a) $t_n(r; x)$ ist in x vom Grade n,

b) der Koeffizient von x^n ist 1,

c) alle von $t_n(r; x)$ verschiedenen Polynome, welche auch die Eigenschaften a) und b) haben, besitzen auf C_r ein Maximum des absoluten Betrages, das größer ist als das Maximum von $|t_n(r; x)|$ auf C_r.

Neben diesem Tschebyscheffschen Polynom $t_n(r; x)$ betrachten wir das Fabersche Polynom $n$ten Grades $p_n(x)$[1], das durch

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x$$

und im übrigen dadurch eindeutig definiert werden kann, daß es als Funktion von t eine Darstellung besitzt

$$p_n(x) = p_n(\psi(t)) = t^n + \frac{1}{t}\mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{t}\right), \tag{2}$$

*) Eine erste Niederschrift der vorliegenden Arbeit übergab ich vor meiner Wiedereinberufung zur Wehrmacht meinem Freunde Prof. Max Müller in Tübingen zur Durchsicht. Ich danke Herrn Müller wärmstens dafür, daß er nicht nur meine Ausführungen nachprüfte, sondern auch die endgültige Abfassung der Arbeit übernahm, als ich selbst durch Einsatz an der Ostfront daran verhindert war.

[1]) G. Faber, Über Tschebyscheffsche Polynome. Journ. f. die reine und angew. Mathematik **150** (1920), S. 79—106.

wo $\mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{t}\right)$ eine mindestens für $|t| > r_0$ konvergente Potenzreihe in $\frac{1}{t}$ bedeutet[2]). Ersetzt man $\mathfrak{U}_x$ durch das Äußere der Kurve C_r, so erhält man wieder die Abbildungsfunktion $w(t)$ und wird auf dasselbe Fabersche Polynom $p_n(x)$ geführt. Zu allen Kreisbildern C_r desselben Außengebietes $\mathfrak{U}_x$ gehört also dasselbe Fabersche Polynom $n$ter Ordnung.

Während Herr Faber im Hinblick auf die Behandlung von Reihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n t_n(r; x)$$

hauptsächlich die Beziehung zwischen den $t_n(r; x)$ und den $p_n(x)$ bei festem r und wachsendem n betrachtet[3]), wird im folgenden der Zusammenhang zwischen diesen Polynomen bei festem n und unbegrenzt wachsendem r untersucht. Es wird gezeigt, daß $t_n(r; x)$ stetig von r abhängt und bei unbegrenzt wachsendem r in jedem beschränkten Teil der x-Ebene gleichmäßig gegen $p_n(x)$ konvergiert.

Wenn also für alle Kreisbilder C_r in einem Bereich $\mathfrak{U}_x$ die Tschebyscheffschen Polynome dieselben, d. h. unabhängig von r sind, sind sie mit den Faberschen Polynomen identisch.

§ 1.

Die $t_n(r; x)$ hängen stetig von r ab.

Daß $t_n(r; x)$ eine stetige Funktion von r ist, ergibt sich unmittelbar aus folgendem Satz:

Ist $\{r_m\}$ eine konvergente Folge von Zahlen, die größer als r_0 sind, und auch

$$\lim_{m \to \infty} r_m = r_* > r_0, \tag{3}$$

so ist

$$\lim_{m \to \infty} t_n(r_m; x) = t_n(r_*; x). \tag{4}$$

Beweis: Nach der Eigenschaft c) der Tschebyscheffschen Polynome ist

$$\operatorname*{Max}_{C_r} |t_n(r; x)| \leqq \operatorname*{Max}_{C_r} |p_n(x)|.$$

Wenn aber x auf C_r liegt, ist $|t| = r$ und daher nach (2)

$$|p_n(x)| \leqq r^n + \frac{1}{r} \operatorname*{Max}_{C_r} \left|\mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leqq r^n + \frac{1}{r} M_n(r),$$

[2]) Vgl. G. Faber, a. a. O., S. 83, Gl. (13), wo nur gemäß unseren Festlegungen t durch $\frac{1}{t}$ zu ersetzen ist.

[3]) A. a. O., § 5.

des Bogens s mit der Periode u, z. B.

$$\bar{\mathfrak{x}}(s+u) = \bar{\mathfrak{x}}(s), \quad \tau(s+u) = \tau(s), \tag{77}$$

wobei die Torsion τ nach Satz 16 noch durch die Ungleichung

$$-1 < \tau < +1 \tag{78}$$

beschränkt ist, weil $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ richtungstreu aufeinander bezogene Eilinien sind.

Zwischen der Torsion τ des Schmiegstreifens und den Krümmungen $\varkappa_l, \varkappa_r$ seiner parataktischen Bilder $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ besteht dabei nach (66) die Beziehung

$$\frac{\varkappa_l}{\varkappa_r} = \frac{1-\tau}{1+\tau}. \tag{79}$$

Dieses kritische Verhältnis der Krümmungen der Eilinien $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ ist nun *extrem* (stationär) dann und nur dann, wenn die Ableitung

$$\left(\frac{\varkappa_l}{\varkappa_r}\right)' = -\frac{2\tau'}{(1+\tau)^2} = 0 \tag{80}$$

ist, d. h. wegen (78), dann und nur dann, wenn die isotrope Torsion τ des Schmiegstreifens extrem (stationär) ist ($\tau' = 0$).

Nochmals ableitend findet man aus

$$\left(\frac{\varkappa_l}{\varkappa_r}\right)'' = -2\,\frac{(1+\tau)\tau'' - 2\tau'^2}{(1+\tau)^3},$$

daß an den Stellen, wo $\tau' = 0$ ist,

$$\left(\frac{\varkappa_l}{\varkappa_r}\right)'' = -\frac{2\tau''}{(1+\tau)^2} \tag{81}$$

ist, d. h. daß einem allfälligen *Maximum* von $\varkappa_l/\varkappa_r$ ein *Minimum* von τ entspricht und umgekehrt.

Der *relative Vierscheitelsatz* 19 ist daher vermöge der parataktischen Abbildung *dem folgenden Satze über periodische Schmiegstreifen oder Raumkurven des isotropen Raumes äquivalent:*

Satz 20. *Ist $\mathfrak{x}(s)$ eine Raumkurve der beschränkten, einmal stetig differenzierbaren isotropen Torsion $-1 < \tau < +1$, die sich periodisch über dem eiförmigen, positiv gekrümmten ($\infty > \varkappa > 0$) und von jedem Periodengange einmal und einsinnig durchlaufenen Grundriß $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ erhebt, so existieren in jedem Periodengange der Raumkurve mindestens vier Stellen mit extremer (stationärer) isotroper Torsion τ.*

13. Räumlicher Beweis der isotropen Fassung des relativen Vierscheitelsatzes. Beim Beweise von Satz 20 können wir annehmen, daß die isotrope Torsion $\tau(s)$ der periodischen Kurve $\mathfrak{x}(s)$ *nicht konstant* sei; im Gegenfalle wäre $\tau' \equiv 0$, und die Eilinien $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ wären als parataktische Bilder eines *Schmiegstreifens konstanter isotroper Torsion* nach Satz 15 zueinander *zentrisch ähnlich*, das Verhältnis ihrer Krümmungen $\varkappa_l/\varkappa_r$ wäre daher ebenfalls konstant, ein Trivialfall, den wir ausschließen wollen.

Wenn die Torsion τ aber *nicht konstant* ist, wird sie wegen ihrer vorausgesetzten Differenzierbarkeit und Beschränktheit in jedem Periodengange z. B. für

$$0 \leqq s < u \tag{82}$$

nach dem Satze von Weierstrass ein absolutes Maximum bzw. Minimum besitzen, etwa in den Punkten $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}(s_1)$ und $\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}(s_2)$, in denen daher $\tau' = 0$ ist. Weitere Nullstellen von τ können nur paarweise auftreten. Daß mindestens ein solches weiteres Paar von Nullstellen vorhanden sein muß, wie Satz 20 behauptet, beweisen wir nach dem bekannten *indirekten Verfahren* von G. Herglotz[4]).

Angenommen, es seien $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ die einzigen Stellen extremer Torsion in dem Periodengange (82). Dann werden diese Punkte den (eiförmigen) Grundriß $\bar{\mathfrak{x}}$ der Raumkurve in zwei Bögen k_+ und k_- zerlegen, auf denen $\tau'(s)$ notwendig *festes Zeichen* hätte, etwa

$$\tau' > 0 \text{ auf } k_+, \quad \tau' < 0 \text{ auf } k_-.$$

Es sei weiter

$$f = ax + by + c \equiv \bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{x}} + c = 0 \tag{83}$$

die Gleichung der *Verbindungsgeraden* f der Punkte $\bar{\mathfrak{x}}_1$ und $\bar{\mathfrak{x}}_2$, etwa so normiert, daß ebenfalls

$$f > 0 \text{ auf } k_+, \quad f < 0 \text{ auf } k_-$$

ist. Dann wäre auf der ganzen (in $\bar{\mathfrak{x}}_1$ und $\bar{\mathfrak{x}}_2$ punktierten) Eilinie $\bar{\mathfrak{x}} \equiv k = k_+ + k_-$ sicher $f \cdot \tau' > 0$, also auch (im Sinne wachsender Bogen erstreckt)

$$\oint_k f \cdot \tau'\, ds > 0. \tag{84}$$

Um zum Widerspruche zu gelangen, berechnen wir den wirklichen Wert dieses Kurvenintegrals. Es ist zunächst nach (83)

$$\oint_k f \cdot \tau'\, ds = \oint_k (\bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{x}} + c)\,\tau'\, ds = c \oint_k \tau'\, ds + \bar{\mathfrak{a}} \oint_k \bar{\mathfrak{x}}\,\tau'\, ds.$$

Wegen der Periodizität von $\tau(s)$ ist nun nach (77) das erste Integral

$$\oint_k \tau'\, ds = \tau(u) - \tau(0) = 0,$$

für das zweite ergibt partielle Integration

$$\oint_k \bar{\mathfrak{x}}\,\tau'\, ds = \bar{\mathfrak{x}}\,\tau \Big|_0^u - \oint_k \tau\,\bar{\mathfrak{x}}' \cdot ds.$$

Wegen der Periodizität von $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ und $\tau(s)$ ist hierin der erste Ausdruck

---

4) Vgl. W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie I, 3. Aufl. Berlin 1930. § 12, S. 30—32.

Zum Beweise entwickeln wir $t_n(r;x)$ nach den Polynomen $p_\nu(x)$ und erhalten[5])

$$(10)\qquad t_n(r;x) = p_n(x)+b_1(r)\,p_{n-1}(x)+\cdots+b_{n-1}(r)\,p_1(x)+b_n(r).$$

Nach (2) ist also, wenn $t = r\tau$ gesetzt wird, auf dem Kreise $|\tau| = 1$

$$\begin{aligned} t_n(r;x) &= t_n(r;\psi(r\tau)) \\ &= p_n(\psi(r\tau)) + b_1(r)\,r^{n-1}\tau^{n-1} + \cdots + b_{n-1}(r)\,r\tau + b_n(r) + \\ &+ \frac{1}{r\tau}\left\{b_1(r)\,\mathfrak{P}_{n-1}\left(\frac{1}{r\tau}\right)+\cdots+b_{n-1}(r)\,\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{r\tau}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$(11)\qquad B(r) = \operatorname{Max}\{|b_1(r)|r^{n-1},\ |b_2(r)|r^{n-2},\ \ldots,\ |b_{n-1}(r)|r,\ |b_n(r)|\}.$$

Ist $B(r) = 0$ für alle hinreichend großen r, etwa für $r > \tilde{r}$, so ist nach (10) $t_n(r;x) \equiv p_n(x)$ für $r > \tilde{r}$ und unsere Behauptung trivial. Andernfalls gibt es beliebig große r, für die $B(r) > 0$ ist. Für diese r kann

$$(12)\qquad t_n(r;x) = p_n(x) + B(r)\left\{Q_{n-1}(r;\tau) + \zeta\left(r;\frac{1}{\tau}\right)\right\}$$

geschrieben werden, wobei

$$(13)\qquad Q_{n-1}(r;\tau) = \frac{b_1(r)\,r^{n-1}}{B(r)}\,\tau^{n-1}+\cdots+\frac{b_n(r)}{B(r)},$$

also nach (11)

$$(14)\qquad |Q_{n-1}(r;\tau)| \leqq n \qquad \text{für } |\tau| = 1,$$

und

$$(15)\qquad \zeta\left(r;\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{r\tau}\left\{\frac{b_1(r)}{B(r)}\,\mathfrak{P}_{n-1}\left(\frac{1}{r\tau}\right)+\cdots+\frac{b_{n-1}(r)}{B(r)}\,\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{r\tau}\right)\right\},$$

also für $|\tau| = 1$

$$(16)\qquad \left|\zeta\left(r;\frac{1}{\tau}\right)\right| \leqq \frac{1}{r}\{M_{n-1}(r)+\cdots+M_1(r)\};$$

mit unbeschränkt wachsendem r strebt also $\zeta\left(r;\frac{1}{\tau}\right)$ auf dem Kreis $|\tau| = 1$ gleichmäßig gegen Null.

Es sei nun $\{r_m\}$ eine Folge oberhalb r_0 gelegener und gegen ∞ strebender Zahlen, für welche $B(r) > 0$ ist. Da die Polynome $Q_{n-1}(r_m;\tau)$ nach (14) auf $|\tau| = 1$ gleichmäßig beschränkt sind, kann man eine Indexteilfolge $m_1, m_2, \ldots$ derart finden, daß an n verschiedenen Punkten $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ des Einheitskreises die Folgen $Q_{n-1}(r_{m_\lambda};\tau_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ konvergieren. Dann existieren auch die Grenzwerte

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{b_1(r_{m_\lambda})}{B(r_{m_\lambda})} = C_1, \ldots, \lim_{\lambda\to\infty}\frac{b_n(r_{m_\lambda})}{B(r_{m_\lambda})} = C_n.$$

Daraus folgt nach (13) die Existenz von

$$\lim_{\lambda\to\infty} Q_{n-1}(r_{m_\lambda};\tau) = C_1\tau^{n-1}+\cdots+C_{n-1}\tau+C_n = Q_{n-1}(\tau).$$

---

[5]) G. Faber, a. a. O., S. 87, Gl. (38).

Nach (11) ist

$$\left|\frac{b_1(r_{m_\lambda})r_{m_\lambda}^{n-1}}{B(r_{m_\lambda})}\right| + \cdots + \left|\frac{b_n(r_{m_\lambda})}{B(r_{m_\lambda})}\right| \geqq 1,$$

also auch, wie der Grenzübergang $\lambda \to \infty$ lehrt,

$$|C_1| + \cdots + |C_n| \geqq 1.$$

Mithin ist das Polynom $Q_{n-1}(\tau)$ zwar höchstens vom Grade $n-1$, aber nicht identisch gleich Null.

Indem wir zur Abkürzung $r_{m_\lambda} = \varrho_\lambda$ setzen, können wir feststellen, daß es eine Folge oberhalb r_0 gelegener und gegen ∞ strebender Zahlen $\{\varrho_\lambda\}$ derart gibt, daß gleichmäßig auf dem Einheitskreis

$$(17) \qquad Q_{n-1}(\varrho_\lambda; \tau) - \zeta\left(\varrho_\lambda; \frac{1}{\tau}\right) \to Q_{n-1}(\tau) \quad \text{für } \lambda \to \infty,$$

wo das Polynom $Q_{n-1}(\tau)$ höchstens vom Grade $n-1$ ist, aber nicht identisch verschwindet.

Nach dem Hilfssatz, den wir in § 3 formulieren und beweisen (angewandt mit $\alpha = 0$ und $\varepsilon = \frac{\pi}{6}$) gibt es, welchen der unendlich vielen möglichen, zueinander mod 2π kongruenten Werte wir auch unter $\arg Q_{n-1}(\tau)$ bzw. unter $\arg \tau_0^n$ verstehen, eine ganze Zahl k und auf dem Kreis $|\tau| = 1$ einen Punkt τ_0, wo $Q_{n-1}(\tau_0) \neq 0$ und

$$(18) \qquad 2k\pi - \frac{\pi}{6} \leqq \arg Q_{n-1}(\tau_0) - \arg \tau_0^n \leqq 2k\pi + \frac{\pi}{6}$$

ist. Ferner ist gleichmäßig für alle Punkte des Einheitskreises

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\varrho_\lambda \tau} \mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{\varrho_\lambda \tau}\right) = 0,$$

während $\varrho_\lambda \tau_0^n$ für $\lambda \to \infty$ auf einem festen Strahl der Zahlenebene gegen ∞ strebt. Daher ist nach (2)

$$\lim_{\lambda \to \infty} \arg\{p_n(\psi(\varrho_\lambda \tau_0))\} = \lim_{\lambda \to \infty} \arg\left\{\varrho_\lambda^n \tau_0^n + \frac{1}{\varrho_\lambda \tau_0} \mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{\varrho_\lambda \tau_0}\right)\right\}$$
$$= \lim_{\lambda \to \infty} \arg \varrho_\lambda^n \tau_0^n = \arg \tau_0^n.$$

Schließlich ist

$$\lim_{\lambda \to \infty} \left\{Q_{n-1}(\varrho_\lambda; \tau_0) + \zeta\left(\varrho_\lambda; \frac{1}{\tau_0}\right)\right\} = Q_{n-1}(\tau_0) \neq 0,$$

also

$$\lim_{\lambda \to \infty} \arg \left\{Q_{n-1}(\varrho_\lambda; \tau_0) + \zeta\left(\varrho_\lambda; \frac{1}{\tau_0}\right)\right\} = \arg Q_{n-1}(\tau_0).$$

Wir können also λ_0 so groß wählen, daß für $\lambda \geqq \lambda_0$

$$(19) \qquad |\arg\{p_n(\psi(\varrho_\lambda \tau_0))\} - \arg \tau_0^n| < \frac{\pi}{12}$$

und

$$(20) \qquad \left|\arg\left\{B(\varrho_\lambda)\left[Q_{n-1}(\varrho_\lambda; \tau_0) + \zeta\left(\varrho_\lambda; \frac{1}{\tau_0}\right)\right]\right\} - \arg Q_{n-1}(\tau_0)\right|$$
$$= \left|\arg\left[Q_{n-1}(\varrho_\lambda; \tau_0) + \zeta\left(\varrho_\lambda; \frac{1}{\tau_0}\right)\right] - \arg Q_{n-1}(\tau_0)\right| < \frac{\pi}{12}$$

VIII. Verallgemeinerung des Vierscheitelsatzes auf Paare isometrischer, umfangsgleicher Eilinien.

15. Formulierung des Satzes. Möglichkeit nicht-eiförmiger Mittenkurven. Wie vor einiger Zeit W. Blaschke bemerkt hat, folgt aus einem Theorem von A. Cauchy über ebene konvexe Vielecke durch Grenzübergang der folgende[6])

Satz 24. *Sind zwei umfangsgleiche stetig gekrümmte Eilinien* $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ *gleichsinnig und längentreu (isometrisch,* $s_l = s_r$*) aufeinander bezogen, so gibt es auf ihnen mindestens vier Paare entsprechender Punkte mit gleichen Krümmungen* ($\varkappa_l = \varkappa_r$).

Vermöge unserer parataktischen Abbildung entspricht dem isometrischen Eilinienpaar $\mathfrak{x}_l$, $\mathfrak{x}_r$ nach den Sätzen 10 und 18 ein *Krümmungsstreifen* $\mathfrak{x}(s)$ des isotropen Raumes, der sich mit der Ganghöhe $h = \frac{1}{2}(F_l - F_r)$ *periodisch* über der *Mittenkurve* $\bar{\mathfrak{x}}(s) = \frac{1}{2}(\mathfrak{x}_l + \mathfrak{x}_r)$ erhebt, die von jedem Gange des Streifens einmal überdeckt wird.

Im Gegensatze zu den früheren Fällen, wo die Zuordnung durch gleichsinnig parallele Tangenten geschah, muß aber jetzt die *Mittenkurve* $\bar{\mathfrak{x}}$ *der isometrischen Eilinien nicht notwendig wieder eine Eilinie sein; sie kann vielmehr ohne weiteres Spitzen haben.* Ist nämlich wieder $2\omega = \widehat{\mathfrak{x}_l' \mathfrak{x}_r'}$ der Winkel entsprechender Tangenten der isometrischen Eilinien $\mathfrak{x}_l$, $\mathfrak{x}_r$, so ist nach (74) die *Krümmung* $\varkappa$ *der Mittenkurve* $\bar{\mathfrak{x}}$ (oder der Trägerkurve $\mathfrak{x}(s)$ des zugehörigen isotropen Krümmungsstreifens)

$$\varkappa = \frac{\varkappa_l + \varkappa_r}{2 \cdot \cos \omega}. \tag{88}$$

Spitzen, d. h. die Werte $\varkappa = \infty$ treten (wegen der Beschränktheit von $\varkappa_l$ und $\varkappa_r$ immer dann und nur dann auf, wenn $\cos \omega = 0$, d. h. $2\omega = \pi$ ist, also *stets dann und nur dann, wenn die entsprechenden Tangentenvektoren* $\mathfrak{x}_l'$ *und* $\mathfrak{x}_r'$ *antiparallel* sind.

Bemerkung 1. Ordnet man z. B. auf einer *Eilinie ohne Mittelpunkt* einander solche Punkte $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ zu, deren Bogen um den halben Umfang differieren, so tritt dies *Ereignis antiparalleler Tangentenpaare*

[6]) A. Cauchy, Sur les polygones et les polyèdres. Seconde mém. J. école polytechn. **9** (1813), S. 87 = Oeuvres (2) 1 (Paris 1905) S. 26—38. — Verbesserung dazu bei E. Steinitz — H. Rademacher, Vorlesungen über die Theorie der Polyeder, Berlin 1934, § 16.

W. Blaschke, Über Paare umfangsgleicher Eilinien. Jahresber. Deutsch. Math. Ver. **48** (1938) S. 69—74. — Der elementare Beweis, den G. Bol in seiner anschließenden Note „Über einen Satz von Cauchy" ebenda S. 74—76 gegeben hat, findet sich (nach Zbl. f. Math.) schon früher bei B. Segre, Il teorema sul minimo numero dei vertici di un'ovale, ed alcune sue estensioni, Atti Accad. Sci. Torino **70** (1935) S. 116—122. — Der vorstehende Beweis des Satzes, der (abgesehen von der Wendung ins räumliche) dem Beweise von W. Blaschke ähnelt, hat vielleicht den Vorteil, auf die Kugel ausdehnbar zu sein.

$\mathfrak{x}_l', \mathfrak{x}_r'$ *mindestens dreimal* ein, d. h. die *Mittenkurve* $\bar{\mathfrak{x}}$ dieser isometrischen Zuordnung der Eilinie zu sich selber hat *mindestens drei Spitzen.*

Bemerkung 2. Für den *isotropen Krümmungsstreifen,* der als parataktisches Abbild der beiden isometrischen Eilinien $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ fungiert, bedeutet das Vorhandensein antiparalleler Tangentenpaare in der isometrischen Zuordnung der Eilinien ebenfalls eine Störung seiner Regularität. Weil nämlich diese Zuordnung an solchen Stellen im kleinen eine zentrische Symmetrie ist, muß sich dort der Streifen im kleinen wie ein Kegel verhalten, d. h. eine *Spitze* der *Trägerkurve* besitzen, die sich dann eben auch im Grundriß als Spitze der Mittenkurve $\bar{\mathfrak{x}}$ auswirkt. Da die Trägerkurve des isotropen Krümmungsstreifens eine orthogonale Trajektorie der Erzeugenden der Torse des Streifens ist, tritt dies Ereignis immer dann ein, wenn die Streifenkurve $\mathfrak{x}$ auf die Gratlinie der Torse des Krümmungsstreifens auftrifft.

16. Sicherung der Eiform der Mittenkurve und der Regularität des Krümmungsstreifens. Man kann nun die unangenehme Möglichkeit singulärer Stellen des Krümmungsstreifens und ebenso den Übelstand einer nicht eiförmigen Mittenkurve (der den glatten Ablauf des Beweisverfahrens von Herglotz behindern würde) leicht dadurch beseitigen, daß man durch eine geeignete *Drehung* etwa der Eilinie $\mathfrak{x}_r$ gegen $\mathfrak{x}_l$ das Auftreten antiparalleler Tangenten $\mathfrak{t}_l = \mathfrak{x}_l'$ und $\mathfrak{t}_r = \mathfrak{x}_r'$ der beiden isometrischen Eilinien vermeidet. Ist aber der Tangentenwinkel $|2\omega| = |\mathfrak{t}_l \mathfrak{t}_r| < \pi$, ω also auf das Intervall

$$(89) \quad -\frac{\pi}{2} < \omega < +\frac{\pi}{2}$$

beschränkt, so ist wegen $\cos\omega > 0$ die Krümmung $\varkappa$ der Mittenkurve $\bar{\mathfrak{x}}$ nach (88) beschränkt und positiv; aus $\varkappa_l, \varkappa_r > 0$ folgt nämlich $0 < \varkappa < \infty$. $\bar{\mathfrak{x}}$ selbst ist also, weil geschlossen, eine *Eilinie.*

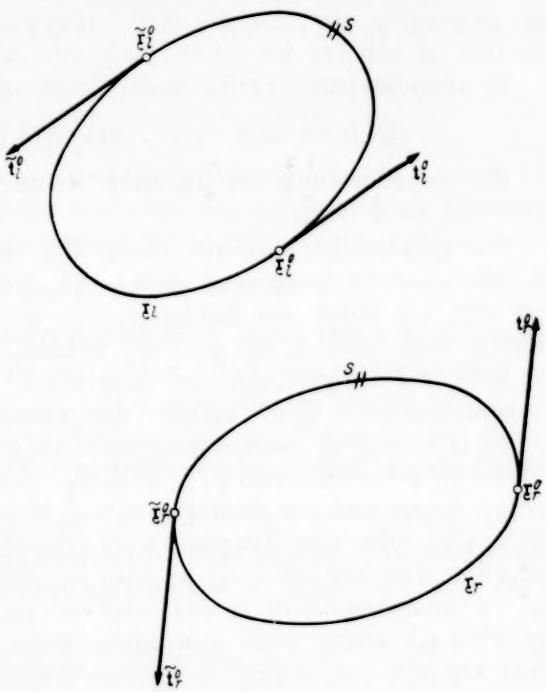

Fig. 3.

Die *Möglichkeit und Existenz einer solchen Drehung* beweisen wir, ähnlich wie W. Blaschke (jedoch rein geometrisch) durch einen einfachen Stetigkeitsschluß. Wir beweisen zuerst den folgenden Hilfssatz:

§ 3.

Ein Hilfssatz über Polynome.

Es ist noch der oben benutzte Hilfssatz anzuführen und zu beweisen:

Bedeutet $Q(x)$ ein beliebiges, nicht identisch verschwindendes Polynom von höchstens $(n-1)$ tem Grade $(n \geqq 1)$ und α eine beliebige Zahl, so gibt es zu jedem noch so kleinen positiven ε auf dem Kreise $|x| = 1$ mindestens einen Punkt x_0, für den $Q(x_0) \neq 0$ und, welchen der unendlich vielen möglichen zueinander mod 2π *kongruenten Werte wir auch unter* arg $Q(x_0)$ *bzw.* arg x_0^n *verstehen,*

$$\alpha_0 - \varepsilon \leqq \arg Q(x_0) - \arg x_0^n \leqq \alpha_0 + \varepsilon$$

ist, wo α_0 eine geeignet gewählte, zu α mod 2π *kongruente Zahl bedeutet.*

Beweis. Falls $Q(x)$ identisch gleich einer Konstanten c ist, kann man sofort ein x_0 angeben, für das sogar

$$\arg c - \arg x_0^n = \alpha$$

ist, nämlich $x_0 = e^{i\omega}$ mit $\omega = \frac{1}{n}(\arg c - \alpha)$.

In allen anderen Fällen zerlegen wir $Q(x)$ in Linearfaktoren:

$$Q(x) = A(x-x_1)\dots(x-x_k) \quad (1 \leqq k \leqq n-1).$$

Wir nehmen zunächst an, daß keine der Nullstellen x_k auf dem Kreis $|x| = 1$ liegt.

Wir entscheiden uns für einen der möglichen Werte von arg A, die alle mod 2π kongruent sind. Wir können ferner φ_* so wählen, daß $e^{i\varphi_*}$ von jeder der Zahlen $x_1, \dots, x_k$ verschieden ist, im vorliegenden Fall also z. B. $\varphi_* = 0$ setzen, und jedem der Ausdrücke arg $(e^{i\varphi_*} - x_\varkappa)$ irgendeinen der möglichen Werte beilegen. An den übrigen Stellen $x = e^{i\varphi}$ können und wollen wir aber dann arg $(x - x_\varkappa)$ = arg $(e^{i\varphi} - x_\varkappa)$ so bestimmen, daß folgendes gilt: Ist $|x_\varkappa| > 1$ und durchläuft φ das Intervall $\varphi_* \leqq \varphi \leqq \varphi_* + 2\pi$, so ändert sich arg $(e^{i\varphi} - x_\varkappa)$ stetig, beginnend mit dem gewählten Wert arg $(e^{i\varphi_*} - x_\varkappa)$, und kehrt für $\varphi \to \varphi_* + 2\pi$ zum Ausgangswert arg $(e^{i\varphi_*} - x_\varkappa)$ zurück; die Gesamtänderung von arg $(e^{i\varphi} - x_\varkappa)$ ist also in diesem Falle gleich Null. Ist $|x_\varkappa| < 1$ und durchläuft φ das Intervall $\varphi_* \leqq \varphi \leqq \varphi_* + 2\pi$, so wächst arg $(e^{i\varphi} - x_\varkappa)$ stetig vom gewählten Wert arg $(e^{i\varphi_*} - x_\varkappa)$ an bis zum Wert arg $(e^{i\varphi_*} - x_\varkappa) + 2\pi$; in diesem Falle erfährt also arg $(e^{i\varphi} - x_\varkappa)$ eine Vermehrung um 2π.

Setzen wir nun

$$\arg Q(e^{i\varphi}) = \arg A + \arg(e^{i\varphi} - x_1) + \dots + \arg(e^{i\varphi} - x_k), \tag{34}$$

so ist also die Änderung von arg $Q(e^{i\varphi})$, wenn φ das Intervall

$\varphi_* \leqq \varphi \leqq \varphi_* + 2\pi$ durchläuft, eine Vergrößerung um höchstens $2k\pi$, also um höchstens $2(n-1)\pi$. Tragen wir

$$y = \arg Q(e^{i\varphi}) = f(\varphi)$$

in einem rechtwinkligen (φ, y)-Koordinatensystem auf, so erhalten wir eine stetige Kurve mit der Anfangskoordinate $\Phi_0 = f(\varphi_*)$ und einer Endkoordinate

$$\Phi_1 = f(\varphi_* + 2\pi) \leqq \Phi_0 + 2(n-1)\pi.$$

Zwischen $\Phi_1 - 2n\pi \leqq \Phi_0 - 2\pi$ (einschließlich) und Φ_0 (ausschließlich) liegt mindestens eine zu $\alpha \bmod 2\pi$ kongruente Zahl $\alpha_0' = \alpha + 2h'\pi$. Wir betrachten die Gerade

$$y = \alpha_0' + n(\varphi - \varphi_*) = g(\varphi).$$

Da

$$g(\varphi_*) = \alpha_0' < \Phi_0 = f(\varphi_*); \quad g(\varphi_* + 2\pi) = \alpha_0' + 2n\pi \geqq \Phi_1 = f(\varphi^* + 2\pi)$$

ist, gibt es im Intervall $\varphi_* < \varphi \leqq \varphi_* + 2\pi$ mindestens eine Stelle φ_0, wo $f(\varphi_0) = g(\varphi_0)$, d. h.

$$\arg Q(e^{i\varphi_0}) = \alpha_0' + n(\varphi_0 - \varphi_*) = \alpha_0' + \arg (e^{i\varphi_0})^n - n\varphi_*, \tag{35}$$

wenn $\arg (e^{i\varphi_0})^n$ geeignet gewählt wird. Setzen wir $e^{i\varphi_0} = x_0$ und insbesondere $\varphi_* = 0$, so ist also $Q(x_0) \neq 0$ und bei der in (34) und (35) getroffenen Bestimmung der auftretenden Argumente

$$\arg Q(x_0) - \arg x_0^n = \alpha_0' = \alpha + 2h'\pi.$$

Nehmen wir die Bestimmung der Argumente irgendwie anders vor, so ändert sich die linke Seite nur um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π, und es wird bei geeigneter Wahl der ganzen Zahl h

$$\arg Q(x_0) - \arg x_0^n = \alpha + 2h\pi = \alpha_0.$$

In diesem Fall ist also unsere Behauptung sogar mit $\varepsilon = 0$ richtig.

Nun ist noch der Fall zu betrachten, daß einige Nullstellen von $Q(x)$ den Betrag 1 haben; es seien dies die Nullstellen $x_1, \ldots, x_l$, wo $1 \leqq l \leqq k \leqq n-1$. Dann können wir φ_* ebenfalls so wählen, daß $e^{i\varphi_*}$ mit keiner Nullstelle von $Q(x)$ zusammenfällt, es aber außerdem so einrichten, daß $|\varphi_*| < \frac{\varepsilon}{2n}$ ist. Das Argument von A und die Argumente $\arg (e^{i\varphi} - x_\varkappa)$ bestimmen wir, falls $|x_\varkappa| \gtrless 1$ ist, wie vorhin. Die Nullstellen $x_\lambda = e^{i\varphi_\lambda}$ können wir uns so numeriert und die φ_λ so gewählt denken, daß

$$\varphi_* < \varphi_1 \leqq \varphi_2 \leqq \cdots \leqq \varphi_l < \varphi_* + 2\pi.$$

Jedem der Ausdrücke $\arg (e^{i\varphi_*} - e^{i\varphi_\lambda})$ legen wir irgendeinen seiner möglichen Werte bei und setzen $\arg (e^{i(\varphi_* + 2\pi)} - e^{i\varphi_\lambda}) = \arg (e^{i\varphi_*} - e^{i\varphi_\lambda}) + 2\pi$. Im Intervall $\varphi_* \leqq \varphi < \varphi_\lambda$ können und wollen wir dann $\arg (e^{i\varphi} - e^{i\varphi_\lambda})$ so bestimmen, daß $\arg (e^{i\varphi} - e^{i\varphi_\lambda})$ stetig vom Ausgangswert $\arg (e^{i\varphi_*} - e^{i\varphi_\lambda})$ anwächst und für $\varphi \to \varphi_\lambda$ gegen einen bestimmten

dort und nur dort, wo die (beschränkte) *Normalkrümmung* $\frac{1}{R} = \varkappa\vartheta$ *des Krümmungsstreifens extrem* (stationär) ist. Es sind das die Stellen des Krümmungsstreifens, wo er von seiner isotropen MEUSNIER-Kugel stationär, d. h. so berührt wird, daß drei benachbarte Flächenelemente auf dieser Kugel liegen. Wir sprechen dann auch von Scheitelelementen oder kurz *von Scheiteln des isotropen Krümmungsstreifens.*

Die in Satz 24 ausgesprochene Verallgemeinerung des Vierscheitelsatzes über umfangsgleiche Paare isometrischer Eilinien steckt also in dem folgenden (allgemeineren) *Vierscheitelsatz über periodische isotrope Krümmungsstreifen:*

Satz 26. Ein reguläres periodischer Krümmungsstreifen des isotropen Raumes, dessen Grundriß $\bar{\mathfrak{x}}$ *eine einsinnig durchlaufene, von jedem Periodengange einfach überdeckte Eilinie* k $(\varkappa > 0)$ *ist und dessen (beschränkte) isotrope Normalkrümmung* $\frac{1}{R} = \varkappa\vartheta$ *einmal stetig differenzierbar ist, besitzt in jedem Periodengange mindestens vier Scheitel (mit stationär berührender isotroper* MEUSNIERscher *Kugel), d. h. vier Stellen mit stationärer Normalkrümmung* $(\varkappa\vartheta)' = 0$.

Bemerkung 4. Dieser Satz ist allgemeiner als der Satz 24, weil er auch Fälle umfaßt, in denen die zugehörigen isometrischen Linien $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ zwar geschlossen, aber nicht mehr konvex (Eilinien) sind. Aus den Formeln (72) und (73) folgt nämlich unter den jetzt gültigen Voraussetzungen, daß $\cos\omega > 0$ und $\varkappa\vartheta$ beschränkt ist, daß *die parataktischen Bilder* $\mathfrak{x}_l$ *und* $\mathfrak{x}_r$ *des isotropen Krümmungsstreifens in Satz 26 dann und nur dann eiförmig sind* $(\varkappa_l, \varkappa_r > 0)$, *wenn*

$$|\omega'| < \varkappa, \quad \text{d. h.} \quad |(\arctan \varkappa\vartheta)'| < \varkappa \tag{92}$$

ist.

Bemerkung 5. Den entsprechenden Vierscheitelsatz für (geschlossene) Krümmungsstreifen des euklidischen Raumes hat W. SÜSS angegeben und ähnlich dem Folgenden JOS. E. HOFMANN bewiesen[7]).

18. Räumlicher Beweis des Satzes. Beim Beweise des Satzes 26 genügt es wieder, die *isotrope Normalkrümmung* $\frac{1}{R} = \varkappa\vartheta$ des periodischen Krümmungsstreifens als *nicht konstant* vorauszusetzen. Wir schließen dadurch nur den Trivialfall der (geschlossenen) sphärischen und ebenen Streifen des isotropen Raumes mit eiförmigem Grundriß aus. Solche Streifen haben nämlich nach Ziffer 4 zwei gleichsinnig kongruente parataktische Bildkurven $\mathfrak{x}_l$, $\mathfrak{x}_r$. In der Tat folgt aus $\frac{1}{R} = \tan\omega = \text{const.}$ sofort $\omega' = 0$, also nach (91) $\varkappa_r(s) \equiv \varkappa_l(s)$, d. h. gleichsinnige Kongruenz der Kurven $\mathfrak{x}_r$ und $\mathfrak{x}_l$.

---

[7]) W. SÜSS, Aufgabe 56 im Jahresber. Deutsch. Math. Ver. — Lösung von J. E. HOFMANN, ebenda 38 (1929), S. 76/77 kursiv.

Wenden wir wieder das indirekte Beweisverfahren von G. HERGLOTZ an, so folgt aus der Annahme lediglich der beiden WEIERSTRASSschen Extreme der (beschränkten) Normalkrümmung $\frac{1}{R}$ die Existenz einer Geraden f der Gleichung

$$f = ax + by + c = \bar{a}\bar{\mathfrak{x}} + c = 0, \tag{93}$$

welche den eiförmigen Grundriß k eines Periodenganges des Krümmungsstreifens so in zwei Teile k_+ und k_- trennt, daß auf jedem von ihnen der Ausdruck $f \cdot \left(\frac{1}{R}\right)'$ *festes Zeichen* hat. Also müßte das Kurvenintegral

$$\oint_k f \cdot \left(\frac{1}{R}\right)' \cdot ds \neq 0$$

sein, im Widerspruch zu seinem wahren Wert, der nämlich 0 ist.

In der Tat ist wegen der Periodizität des Ortsvektors $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ des Streifengrundrisses, der Normalkrümmung $\frac{1}{R(s)}$ und des Ortsvektors des isotropen sphärischen Bildes $\mathfrak{X}(s)$, wenn u den Umfang des Grundrisses bezeichnet, also wegen

$$\bar{\mathfrak{x}}(s+u) = \bar{\mathfrak{x}}(s), \quad \frac{1}{R(s+u)} = \frac{1}{R(s)}, \quad \mathfrak{X}(s+u) = \mathfrak{X}(s) \tag{94}$$

zunächst

$$\oint_k f \cdot \left(\frac{1}{R}\right)' ds = c \cdot \oint_k \left(\frac{1}{R}\right)' ds + \bar{a} \cdot \oint_k \bar{\mathfrak{x}} \left(\frac{1}{R}\right)' ds.$$

Nun ist nach (94) das erste Integral rechter Hand gleich 0, und wenn wir das zweite nach Teilen integrieren und die für Krümmungsstreifen gültige Formel von RODRIGUES (48, links) heranziehen, sehen wir, daß auch das zweite Integral gleich 0 ist. Wirklich ist

$$\oint_k \bar{\mathfrak{x}} \left(\frac{1}{R}\right)' ds = \bar{\mathfrak{x}} \frac{1}{R}\Big|_{s=0}^{s=a} - \oint_k \frac{1}{R} \bar{\mathfrak{x}}' ds = 0 - \oint_k \bar{\mathfrak{X}}' ds = 0.$$

Damit ist in jedem Periodengange des Krümmungsstreifens die Existenz von mindestens vier Scheiteln gesichert und mit Satz 26 auch Satz 24 bewiesen.

Bemerkung 6. Daß die Minimalzahl von vier Scheiteln bei regulären isotropen Krümmungsstreifen, die periodisch über eiförmigem Grundriß errichtet sind, wirklich erreicht wird, zeigt bereits der Fall des (geschlossenen) *Böschungsstreifens durch eine Ellipse der Bildebene*. Für einen solchen sind (weil ϑ konstant $= \vartheta_0$, also $\frac{1}{R} = \vartheta_0 \cdot \varkappa$ ist) die Endpunkte der Hauptachsen (und nur sie) isotrope Scheitel. Durch parataktische Abbildung erhält man in der Ebene als *Minimalbeispiel zu Satz 24 zwei Äquitangentialkurven der Ellipse*, die zu gegengleichen Tangentenstrecken gehören. Diese Äquitangentialkurven sind nicht notwendig konvex, sie werden es aber, wenn die Tangentenstrecke im Verhältnis zu den Dimensionen der Ellipse genügend groß gewählt wird. Unabhängig davon aber gibt es auf diesen Kurvenpaaren, die durch die Konstruktion notwendig aufeinander iso-

Eindeutige beschränkte Funktionen in mehrfach zusammenhängenden Gebieten.

III. Ein Einzigkeitssatz.

Von

H. Grunsky in Trossingen (Württ.)

Einleitung.

1. Im folgenden handelt es sich um den Beweis für die Einzigkeit der Lösung eines gewissen Extremalproblems [1]). Dem in Teil I dieser Arbeit [2]) formulierten Satz I liegt eine Klasse von Funktionen zugrunde, die in einem mehrfach zusammenhängenden Gebiet regulär, eindeutig und gleichmäßig beschränkt sind und in einem festen inneren Punkt verschwinden. Behauptet wurde unter anderem, daß es unter diesen Funktionen im wesentlichen nur eine einzige gibt, die in einem zweiten vorgegebenen innern Punkt möglichst großen Betrag annimmt. Der übrige Inhalt von Satz I ist ein Spezialfall des in Teil II [2]) bewiesenen Satzes IV, der aber keine Einzigkeitsaussage enthält. Der Beweis dieses Teiles von Satz I steht also noch aus und wird uns hier beschäftigen. Doch kann ich ihn auch jetzt noch nicht allgemein geben, muß mich vielmehr auf den Fall eines dreifach zusammenhängenden Gebietes beschränken. Die Untersuchung der Einzigkeitsfrage für den entsprechenden Spezialfall des allgemeineren Extremalproblems von Satz IV stelle ich, obgleich sie mit denselben Mitteln durchzuführen wäre, zurück, damit nicht der an sich einfache Gedankengang in einem übergroßen Vielerlei von Fallunterscheidungen zu sehr an Deutlichkeit verliere. Ich werde also beweisen:

Satz I a′: *$\mathfrak{B}$ sei ein dreifach zusammenhängendes schlichtes Gebiet ohne punktförmige Randkomponente, z_0 und z^* seien zwei verschiedene innere Punkte desselben. $\mathfrak{K}_I$ sei die Klasse der in $\mathfrak{B}$ regulären, eindeutigen Funktionen $F(z)$ mit $|F(z)|<1$, $F(z_0)=0$. Dann gibt es in $\mathfrak{K}_I$, abgesehen von einem willkürlichen konstanten Faktor vom Betrage* 1, *genau eine Funktion $F_I(z)$, für die $|F(z^*)|$ ein absolutes Maximum innerhalb von $\mathfrak{K}_I$ erreicht.*

---

[1]) Über den Inhalt dieser Arbeit habe ich auf der Tagung der DMV in Jena im Oktober 1941 vorgetragen; vgl. den Bericht in J.-Ber. Deutsche Math.-Vereinig. **52** (1942), 2. Abt., S. 33.

[2]) Teil I und II: J.-Ber. Deutsche Math.-Vereinig. **50** (1940), 230—255; **52** (1942), 118—132.

2. Aus dem schon bewiesenen Teil von Satz I wissen wir, daß jede Funktion $w = F(z)$ mit der Extremaleigenschaft das Gebiet $\mathfrak{B}$ auf ein Riemannsches Flächenstück abbildet, das $|w| < 1$ überall dreimal bedeckt; dabei geht jede der drei Randkomponenten in den einmal durchlaufenen Rand des Einheitskreises über. Damit ist eine Teilklasse $\mathfrak{K}_I'$ aus $\mathfrak{K}_I$ ausgesondert, in der die Extremalfunktionen zu suchen sind. Es wird sich zeigen, daß die Elemente von $\mathfrak{K}_I'$ im allgemeinen eine geschlossene zweidimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ bilden (auf der, von gewissen Ausnahmen abgesehen, jede Funktion von $\mathfrak{K}_I'$ zweimal auftritt). $|F(z^*)|$ ist nun eine Funktion auf $\mathfrak{M}$, und es wird nach der Anzahl der Stellen gefragt, in denen sie ihr absolutes Maximum erreicht. Die Antwort stützt sich auf zwei Überlegungen: erstens ziehen wir die Kroneckersche Formel heran, die die Anzahl der (relativen) Maxima, Minima und Sattelwerte mit dem Geschlecht von $\mathfrak{M}$ verknüpft. Zweitens bestimmen wir die Gesamtzahl der stationären Stellen, und zwar mittels der Euler-Lagrangeschen Multiplikatorenregel. Aus diesen beiden Beziehungen lassen sich die drei Anzahlen ermitteln, wenn man noch die selbstverständlichen Mindestanzahlen der Maxima und Minima berücksichtigt. Es wird sich dabei ergeben, daß es innerhalb von $\mathfrak{K}_I'$ im wesentlichen sogar nur ein relatives Maximum gibt.

Durchführung des Beweises.

1. Die eingeengte Funktionsklasse als zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir voraussetzen, die drei Komponenten C_0, C_1, C_2, des Randes C von $\mathfrak{B}$ seien geschlossene analytische Kurven und $\mathfrak{B}$ sei beschränkt; durch C_0 werde $\mathfrak{B}$ vom Punkte ∞ getrennt.

1. 1. Jede Funktion $F(z)$ aus $\mathfrak{K}_I'$ hat außer der vorgeschriebenen Nullstelle z_0 noch zwei zusätzliche, z_1 und z_2, und sie ist durch diese bis auf einen konstanten Faktor vom Betrage 1 völlig bestimmt. Aber damit ein Paar $\mathfrak{z} = (z_1, z_2)$ von Punkten aus $\mathfrak{B}$ als Paar zusätzlicher Nullstellen einer Funktion aus $\mathfrak{K}_I'$ brauchbar sei, muß es gewissen Bedingungen genügen. Setzen wir für $F(z) \in \mathfrak{K}_I'$:

$$\log F(z) = T(z) = t(z) + i\, t^*(z),$$

so ist $t(z)$ eine in $\mathfrak{B}$ überall reguläre harmonische Funktion, abgesehen von den Punkten z_ι $(\iota = 0, 1, 2)$, wo sie sich wie $\log|z - z_\iota|$ verhält, welche auf dem Rande verschwindet. Diese Eigenschaften sind kennzeichnend für $t(z)$; sie kommen aber der Funktion $-\sum_{\iota=0}^{2} g(z; z_\iota)$ zu, wenn $g(z; \zeta)$ die Greensche Funktion von $\mathfrak{B}$ mit der Singularität ζ bezeichnet; also ist

$$t(z) = -\sum_{\iota=0}^{2} g(z; z_\iota).$$

20. Die der Eilinie c zugeordnete Fläche Φ der festen Relativkrümmung $K = -1$. Es sei in der Bildebene π eine *Eilinie* c gegeben. Wir denken sie überdeckt von zwei Kurven $c_l = c_r = c$, die wir als parataktische Bilder einer Fläche Φ der festen Relativkrümmung $K = -1$ auffassen und der Eilinie c zuordnen wollen. Die Flächenelemente E dieser Fläche Φ haben also parataktische Bilder E_l, E_r die unabhängig voneinander auf c gewählt werden können.

Wählt man $E_l = E_r$, so fällt das Flächenelement E von Φ mit dem Schmiegelement E von c zusammen, d. h. *die Fläche Φ enthält den ebenen Schmiegstreifen der Eilinie c.* Da man die Elementenpaare (E_l, E_r) in (E_r, E_l) vertauschen darf, ist *Φ bezüglich der Bildebene π symmetrisch. Die Eilinie c ist also notwendig Rückkehrkante der Fläche Φ.*

Es ist leicht, die Fläche Φ analytisch anzugeben. Lautet die ebene Kurve c, durch den Parameter t beschrieben,

$$c\ldots,\quad x = x(t),\ y = y(t), \tag{104}$$

so ist für ihren Schmiegstreifen $z = p = q = 0$, und man kann das parataktische Bildpaar c_l, c_r mittels zweier Parameter u, v so ansetzen:

$$c_l\begin{cases} x_l = x(v) \\ y_l = y(v), \end{cases} \qquad c_r\begin{cases} x_r = x(u) \\ y_r = y(u). \end{cases} \tag{104}$$

Daraus gewinnt man nach (9) sofort die folgende *Darstellung der Fläche Φ*:

$$\Phi\begin{cases} x = \frac{1}{2}[x(u) + x(v)] & p = +\frac{1}{2}[y(u) - y(v)] \\ y = \frac{1}{2}[y(u) + y(v)] & q = -\frac{1}{2}[x(u) - x(v)] \\ z = \int_v^u p\,dx + q\,dx = \frac{1}{4}\left\{\int_u^v (x\,dy - y\,dx) - [x(u)\,y(v) - x(v)\,y(u)]\right\}. \end{cases} \tag{105}$$

Für $u = v = t$ erhält man den Schmiegstreifen der ebenen Rückkehrkurve c. Die u- und v-Linien sind die *Asymptotenlinien* der Fläche.

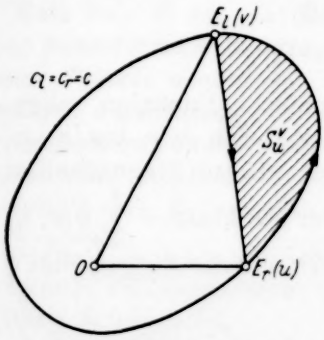

Fig. 5.

Die Formel für z läßt wieder eine einfache *geometrische Deutung* zu (Fig. 5). Das Integral rechter Hand stellt nämlich die doppelte Fläche des *Sektors* $\widehat{O E_r E_l}$, die eckige Klammer die doppelte Fläche des *Dreiecks* $(O E_r E_l)$ dar. Es folgt

$$\boxed{z = \tfrac{1}{2} S_u^v,} \tag{106}$$

wenn S_u^v *die Fläche des Segmentes* der Kurve c bezeichnet, das über der Sehne $\overline{E_r(u)\,E_l(v)}$ aufruht.

Bemerkung 1. Dieses einfache Ergebnis kann natürlich auch aus Satz 9 gefolgert werden. Legen wir nämlich in irgend einer horizontalen d. h. zur Bildebene π parallelen Richtung r an die Fläche Φ den *Berührungszylinder*, so berührt er längs jener Kurve k *(Eigenschattengrenze für r)*, welche den Ort k der Sehnenmitten dieser Richtung r als Grundriß hat. Die einzelnen parallelen Sehnen $\overline{E_l E_r}$ schneiden die Kurve c in den parataktischen Bildpunkten der Flächenelemente E dieser Eigenschattengrenze k. Wählt man als Ausgangssehne $\overline{E_l^0 E_r^0}$ die Tangente t^0 der Richtung r, so stimmt der durch die Formel (21) dargestellte Flächeninhalt F genau mit dem Inhalte S_u^v des Segmentes überein, welches die Sehne $\overline{E_l E_r}$ von der Kurve c abschneidet.

Man erhält so die folgende einfache *elementargeometrische Konstruktion der Fläche* Φ der festen Relativkrümmung $K = -1$, welche der ebenen Kurve c zugeordnet ist[9]).

Satz 30. *Es sei* $(E_r(u)\, E_l(v))$ *ein beliebiges Punktepaar auf der Eilinie* c *und* S_u^v *das Segment, das seine Sehne von* c *abschneidet. Trägt man dann im Sehnenmittelpunkte* $\bar{E}$ *die Maßzahl der halben Fläche des Segmentes* S_u^v *als z-Kote auf, so durchläuft der Endpunkt* P *jene Fläche* Φ *der festen Relativkrümmung* $K = -1$, *deren* Liescher *Elementverein sich auf die (doppeltüberdeckte) Kurve* $c = c_l = c_r$ *abbildet. Diese der Eilinie* c *zugeordnete Fläche* Φ *ist zur Bildebene* π *symmetrisch und hat die Eilinie selber als ebene Rückkehrkante. Die Fläche* Φ *ist periodisch in* z *mit der Periode (Ganghöhe)*

$$h = \tfrac{1}{2} F, \tag{107}$$

wenn F *den Flächeninhalt der Eilinie bedeutet.*

Die zuletzt genannte Eigenschaft erkennt man sofort, wenn man einen der beiden Bildpunkte eines Flächenelementes E von Φ auf c festhält und den anderen die Eilinie c umlaufen läßt.

Aus dieser Konstruktion von Φ folgt der für uns wichtige

Satz 31. *Wird die Sehne* $\overline{E_l E_r}$ *innerhalb der Eilinie* c *so bewegt, daß sie von ihr stets Segmente festen Inhalts* S_u^v *abschneidet, so entspricht ihren Lagen im Raume parataktisch eine Schichtenlinie (ein Schichtenstreifen) auf der* c *zugeordneten Fläche* Φ, *die in der Höhe* $z = \frac{1}{2} S_u^v$ *über der Ebene von* c *liegt.*

Weil für die Schichtenlinie $dz = p\,dx + q\,dy = 0$ *ist, berühren die Sehnen* $\overline{E_l E_r}$ *die Kurve* $\bar{E}$ *ihrer Mittelpunkte.*

Man kann an Hand der Eilinie c sehr leicht die *Grundrisse der Asymptotenlinien* und der isotropen *Krümmungslinien* der Fläche Φ angeben.

Die Asymtotenlinien von Θ haben nach den Überlegungen vor Satz 29 festen linken oder rechten Bildpunkt, während der jeweils andere Bildpunkt der Eilinie c durchläuft. Durch Übergang zu den Sehnenmittelpunkten folgt der

Satz 32. *Die Grundrisse der Asymptotenlinien der Fläche* Φ, *der festen Relativkrümmung* $K = -1$, *welche der Eilinie* c *zugeordnet*

[9]) Vgl. G. Scheffers, Eigenschaften der Integralflächen der partiellen Differentialgleichung $s^2 - rt = \text{konst}$. Math. Zeitschr. **5** (1919), S. 112—117.

ist, erhält man, indem man die Eilinie c aus ihren Punkten im Verhältnis 1 : 2 verkleinert. Die Schiebschar[9]) *dieser Kurven umhüllt außer der Eilinie c noch eine weitere Kurve* $\bar{k}$, *nämlich den Ort der Mitten jener Sehnen* $\overline{E_l E_r}$, *welche die Berührungspunkte paralleler Tangenten von c verbinden.*

Dieser Mittenort $\bar{k}$ der Sehnen, welche zu parallelen Tangenten von c gehören, kann a) ein Punkt K sein; die Eilinie c hat dann einen Mittelpunkt. Oder er kann b) eine wirkliche *Kurve* (mit wenigstens drei Spitzen) sein, wenn die Eilinie keinen Mittelpunkt hat. Der zugehörige Berührungsstreifen auf der Fläche Φ ist dann im Falle a) ein *Elementarkegel* (der sich ebenso wie Φ periodisch wiederholt), im Falle b) aber ein geschlossener, ebenfalls periodisch wiederholter *singulärer Schmiegstreifen*, der (ähnlich dem Schmiegstreifen der Rückkehrkante c) von den beiden Scharen der regulären Schmiegstreifen σ_l, σ_r der Fläche Φ eingehüllt wird. Dieser singuläre Schmiegstreifen k besteht in jedem Gange der periodischen Fläche Φ, der von zwei ebenen Rückkehrkanten c und c' begrenzt ist, aus einer einzügigen Kurve mit mindestens sechs Spitzen, die zur Mittenebene des Ganges symmetrisch ist.

Die beiden Scharen der isotropen *Krümmungslinien* der Fläche Φ haben nach Satz 18 als parataktische Bilder die $2.\ \infty^1$ *isometrischen Beziehungen der Eilinie c auf sich selbst*, wobei der einen Schar die gleichsinnig-, der anderen Schar die ungleichsinnig-kongruenten Beziehungen von c entsprechen. *Diese Krümmungslinien sind dabei im gleichsinnigen Falle (wegen* $F_l = F_r$*) geschlossen, im ungleichsinnigen Falle aber nur periodisch und offen.*

Entsprechende Punkte E_l, E_r zweier gleichsinnig-kongruenter Punktreihen auf der Eilinie c differieren um feste Bogenstücke. Also folgt

Satz 33. *Wird die (variable) Sehne in der Eilinie c so herumgeführt, daß sie auf c feste Bogenstücke abschneidet, so entspricht ihr im Raume parataktisch ein geschlossener isotroper Krümmungsstreifen auf der durch die Eilinie c bestimmten Fläche* Φ *der festen Relativkrümmung* $K = -1$.

Im *Grundrisse* erhält man die isotropen *Krümmungslinien von* Φ sofort als *Örter der Sehnenmitten der gleich- bzw. gegensinnig-isometrischen Abbildungen der Eilinie c auf sich selber*. Diese beiden Kurvenscharen bilden ein *in die Eilinie c eingebettetes Orthogonalsystem*, dessen eine (dem gleichsinnigen Falle entsprechende) Schar aus lauter *geschlossenen Linien besteht*, unter denen c selber als Randkurve vorkommt, während die zweite (dem ungleichsinnigen Falle entsprechende) Schar aus *offenen Transversalen der Eilinie c* besteht, welche solche Punktepaare von c verbinden, die um den halben Eilinienumfang $\frac{1}{2}U$ differieren.

Wir erwähnen noch den aus Ziffer **5**, Beispiel 4 folgenden

Satz 34. *Wird eine Sehne fester Länge* $\overline{E_l E_r} = 2a = const.$ *in der Eilinie c herumgeführt, so entspricht ihr auf der durch c bestimmten*

Fläche Φ der festen Relativkrümmung $K = -1$ ein geschlossener Böschungsstreifen der gegen die Ebene π von c unter dem festen isotropen Winkel $\vartheta = a$ geneigt ist.

Wir bezeichnen auch im isotropen Raume als Fallstreifen gegen die Bildebene π jene, welche durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} p & q \\ dx & dy \end{vmatrix} = 0 \tag{108}$$

gekennzeichnet sind. Für sie folgt leicht

Satz 35. *Wird die (variable) Sehne $\overline{E_1E_2}$ so in der Eilinie c herumgeführt, daß sie ihren Mittenort orthogonal durchsetzt, so beschreibt das entsprechende Flächenelement E auf der durch c bestimmten Fläche Φ einen Fallstreifen.*

Zusammenfassend haben wir folgendes parataktische Entsprechen zwischen Sehnenörtern der Eilinie c und Streifen (Kurven) auf der durch c bestimmten Fläche Φ der festen Relativkrümmung $K = -1$ gefunden:

Eilinie c	Fläche Φ
1) Sehnen, welche auf c Segmente fester Fläche abschneiden (oder welche ihren Mittenort berühren).	Geschlossener Schichtenstreifen auf Φ.
2) Sehnen, welche auf c gleiche Bogen abschneiden.	Geschlossener isotroper Krümmungsstreifen auf Φ.
3) Sehnen von c, welche feste Länge haben.	Geschlossener Böschungsstreifen auf Φ.
4) Sehnen von c, deren Endpunkte parallele Tangenten aufweisen.	Geschlossener (singulärer) Asymptotenstreifen auf Φ (Hüllgebilde der regulären Asymptotenstreifen). Im Falle einer Mittelpunktskurve c: Elementarkegel.
5) Sehnen von c, welche ihren Mittenort orthogonal durchsetzen.	Offener Fallstreifen auf Φ.

X. Das Übertragungsprinzip der Elementenschwenkung.

21. Definition der Elementenschwenkung. Es sei $E(x, y, z + c, p, q)$ ein bis auf vollisotrope Schiebungen bestimmtes Flächenelement des isotropen Raumes. Wir wollen ihm das ebenfalls nur bis auf vollisotrope Schiebungen bestimmte Flächenelement $\tilde{E}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} + \tilde{c}, \tilde{p}, \tilde{q})$ zuordnen,

dessen Koordinaten durch die Formeln

$$(109)\qquad \begin{cases} \tilde{x} = x, & \tilde{p} = -q, \\ \tilde{y} = y, & \tilde{q} = p, \\ \tilde{z} = \text{beliebig}, \end{cases}$$

bestimmt sind. Die Transformation (109) der Flächenelemente nennen wir eine *Elementenschwenkung*. Es folgt

Satz 36. *Durch Elementenschwenkung entspricht einem Flächenelement E ein anderes $\tilde{E}$ (die beide nur bis auf vollisotrope Schiebungen bestimmt sein müssen), das mit ihm denselben Grundriß $\overline{E} = (x, y)$ hat, so zwar, daß $\tilde{E}$ aus E durch positive Vierteldrehung um die gemeinsame (vollisotrope, d. h. z-parallele) Normale der beiden Flächenelemente entsteht. Das isotrope sphärische Bild von E erfährt dabei ebenfalls eine positive Vierteldrehung. E und $\tilde{E}$ sind dabei gegen die Bildebene π unter gleichem isotropen Winkel geneigt.*

Dem Streifen

$$(110)\qquad \mathfrak{x} \ldots x(s), y(s), z(s) = \int p\,dx + q\,dy,\ p(s), q(s)$$

entspricht durch Elementenschwenkung der Streifen

$$(111)\qquad \tilde{\mathfrak{x}} \ldots \begin{cases} \tilde{x} = x(s), & \tilde{p} = -q(s), \\ \tilde{y} = y(s), & \tilde{q} = p(s), \\ \tilde{z} = \int \tilde{p}\,d\tilde{x} + \tilde{q}\,d\tilde{y} = \int p\,dy - q\,dx. \end{cases}$$

Man stellt leicht fest, daß diese (nach keiner Richtung eindeutige) Elementenschwenkung keine Berührungstransformation ist. Schwenkt man nämlich die Berührungselemente E einer Schar paralleler Flächen

$$(112)\qquad z = z(x, y) + \text{const.}$$

so erhält man Flächenelemente $\tilde{E}$, aus denen man i. a. nicht wieder eine parallele Flächenschar $\tilde{z} = \tilde{z}(x, y) + \text{const.}$ zusammensetzen kann. Vielmehr wird i. a. eine nicht integrable Pfaffsche Mannigfaltigkeit von Flächenelementen $\tilde{E}$ entstehen, also das, was man auch eine anholonome Fläche genannt hat.

Z. B. erhält man aus den Flächenelementen E der isotropen Kugeln

$$(113)\qquad z = \frac{A}{2}(x^2 + y^2) + Bx + Cy + \text{const.}$$

die Flächenelemente $\tilde{E}$ des Gewindes

$$(114)\qquad dz = A(x\,dy - y\,dx) - C\,dx + B\,dy.$$

Daraus folgt, daß einem isotropen *sphärischen Streifen* (isotropen Krümmungsstreifen der festen Normalkrümmung $\varkappa\vartheta = \frac{1}{R} = A$) durch Elementenschwenkung ein *Nullstreifen* (Schmiegstreifen der festen isotropen Torsion $\tilde{\tau} = A$) entspricht.

Eine Fläche (integrable Pfaffsche Mannigfaltigkeit) entsteht vielmehr aus der Fläche (112) durch Elementenschwenkung dann und nur dann, wenn der Ausdruck

$$d\tilde{z} = \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y})\, d\tilde{x} + \tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{y})\, d\tilde{y} = p(x,y)\, dy - q(x,y)\, dx \tag{115}$$

ein vollständiges Differential ist, also dann und nur dann, wenn

$$\frac{\partial p(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial q(x,y)}{\partial y}$$

oder wenn der Laplace-Ausdruck

$$2H = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \tag{116}$$

ist. Nun ist dieser Ausdruck

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{117}$$

die isotrope mittlere Krümmung der Fläche. Ihr Verschwinden kennzeichnet die isotropen Minimalflächen, die man als Integralflächen von (116) bekanntlich stets in der Form

$$z = \Re f(x + iy) \tag{118}$$

darstellen kann, unter $f(x + iy)$ eine beliebige komplexe analytische Funktion der komplexen Variablen $(x + iy)$ verstanden.

Für die Berührungselemente E der Minimalfläche (118) ist nun

$$p + iq = \bar{f}'(x - iy),$$

woraus sich

$$\tilde{p} + i\tilde{q} = -q + ip = if'(x - iy)$$

und

$$\tilde{z} = \Re[-i.f(x+iy)] = \Im f(x+iy) \tag{119}$$

als Gleichung der Minimalfläche ergibt, welche aus (118) durch Elementenschwenkung entsteht. Es ist dies die sogenannte *konjugierte* isotrope Minimalfläche zu (118).

Es gilt also

Satz 37. *Die Elementenschwenkung $E \to \tilde{E}$ führt i. a. den Lieschen Elementverein einer Fläche* (112) *und ihrer isotropen Parallelflächen über in eine nicht integrable Pfaffsche Mannigfaltigkeit von Flächenelementen (anholonome Fläche). Lediglich aus einer Parallelschar isotroper Minimalflächen* (118) *entsteht durch Elementenschwen-*

kung immer wieder eine neue Parallelschar von Flächen (integrablen Pfaffsche *Mannigfaltigkeiten), nämlich die Parallelschar der dazu konjugierten isotropen Minimalflächen* (119).

Da man durch jeden im isotropen Raume regulären analytischen Streifen, der für die Laplacesche Gleichung nicht charakteristisch ist, also z. B. durch jeden reellen regulären analytischen Streifen genau eine isotrope Minimalfläche legen kann (Gegenstück des Björlingschen Problems), folgt aus Satz 37 noch

Satz 38. *Legt man durch zwei Streifen* $\mathfrak{x}$ *und* $\tilde{\mathfrak{x}}$, *die einander durch Elementenschwenkung entsprechen, die möglichen isotropen Minimalflächen, so erhält man notwendig zwei zueinander konjugierte isotrope Minimalflächen. Von vollisotropen Schiebungen ist dabei stets abgesehen.*

22. Einige wichtige Eigenschaften der Elementenschwenkung. Aus Satz 36 folgt, daß durch Elementenschwenkung einander Streifen $\mathfrak{x}$ und $\tilde{\mathfrak{x}}$ zugeordnet sind, deren Grundrisse identisch, deren isotrope sphärische Bilder $\mathfrak{X}$ und $\tilde{\mathfrak{X}}$ aber gegeneinander um einen rechten Winkel gedreht sind. Wir folgern daraus den wichtigen

Satz 39. *Durch Elementenschwenkung entspricht einem Schmiegstreifen ein isotroper Krümmungsstreifen und umgekehrt.*

In der Tat ist nach Satz 13 für einen Schmiegstreifen $\mathfrak{X}' \parallel \mathfrak{h}$ kennzeichnend, woraus durch Elementenschwenkung ein Streifen entsteht, für welchen $\tilde{\mathfrak{X}}' \perp \tilde{\mathfrak{h}}$ oder $\tilde{\mathfrak{X}}' \parallel \tilde{\mathfrak{t}}$ ist; dies ist aber für isotrope Krümmungsstreifen kennzeichnend. Ebenso folgt die Umkehrung.

Satz 39 steckt als Sonderfall in dem folgenden allgemeinen

Satz 40. *Zwischen den drei isotropen Grundinvarianten zweier Streifen* $\mathfrak{x}$ *und* $\tilde{\mathfrak{x}}$, *die durch Elementenschwenkung auseinander hervorgehen, bestehen die Gleichungen*:

$$\boxed{\begin{aligned} \varkappa &= \tilde{\varkappa}, \\ \varkappa\vartheta &= \tilde{\tau} - \tilde{\vartheta}', \\ \tau - \vartheta' &= -\tilde{\varkappa}\tilde{\vartheta}. \end{aligned}} \tag{120}$$

Beweis. Die erste Gleichung ist wegen des gemeinsamen Grundrisses der beiden Streifen trivial. — Die zweite und dritte folgen aus (111) leicht in der Gestalt

$$\begin{aligned} \mathrm{II} &= dp\,dx + dq\,dy = \quad d\tilde{q}\,d\tilde{x} - d\tilde{p}\,d\tilde{y} = \quad \tilde{\mathrm{IV}}, \\ \mathrm{IV} &= dq\,dx - dp\,dy = -(d\tilde{p}\,d\tilde{x} + d\tilde{q}\,d\tilde{y}) = -\tilde{\mathrm{II}}. \end{aligned} \tag{121}$$

Es folgt noch

Satz 41. *Durch das Übertragungsprinzip der Elementenschwenkung entspricht, wie erwähnt, einem isotropen Krümmungsstreifen* $\mathfrak{x}$ $(\tau - \vartheta' = 0)$ *ein Schmiegstreifen* $\tilde{\mathfrak{x}}$ $(\tilde{\varkappa}\tilde{\vartheta} = 0)$ *und umgekehrt. Dabei ist einem Scheitel des Krümmungsstreifens* [*d. h. einer Stelle mit*

stationärer isotroper Normalkrümmung $(\varkappa\vartheta)' = 0$] *stets ein „Scheitel" des Schmiegstreifens* [*d. h. eine Stelle mit stationärer isotroper Torsion* $(\tilde{\tau} - \tilde{\vartheta}')' = \tilde{\tau}' = 0$] *zugeordnet und umgekehrt.*

Die räumlichen Vierscheitelsätze 20. *und* 26. *können also durch das Übertragungsprinzip der Elementenschwenkung auseinander gefolgert werden.*

Es gilt ferner

Satz 42. *Durch Elementenschwenkung entspricht einem Schichtenstreifen bezüglich* π *ein Fallstreifen bezüglich* π *und umgekehrt. Einem Böschungsstreifen gegen* π *aber entspricht wieder ein gleichartiger Böschungsstreifen.*

In der Tat folgt aus $p\,dx + q\,dy = 0$ (Schichtenstreifen) sofort $q\,dx - p\,dy = 0$ (Fallstreifen) und umgekehrt.

Beispiel 1. Aus den Sätzen 37. und 38. ergibt sich, daß auf zwei konjugierten isotropen Minimalflächen einander sowohl die Schichtenlinien und Fallinien als auch die isotropen Krümmungslinien und Asymptotenlinien wechselweise durch Elementenschwenkung entsprechen.

Indem wir unser Übertragungsprinzip der Elementenschwenkung auf den Satz von Joachimsthal über ebene isotrope Krümmungsstreifen (Satz 12) anwenden, erhalten wir das folgende Satzpaar:

Satz 43. *Besitzt ein Streifen* $\mathfrak{x}$ *bzw.* $\tilde{\mathfrak{x}}$ *des isotropen Raumes irgend zwei der folgenden drei Eigenschaften:*

1. $\mathfrak{x}$ *ist Schichtenstreifen bezüglich* π	1. $\tilde{\mathfrak{x}}$ *ist Fallstreifen bezüglich* π
2. $\mathfrak{x}$ *ist Böschungsstreifen bezüglich* π	2. $\tilde{\mathfrak{x}}$ *ist Böschungsstreifen bezüglich* π
3. $\mathfrak{x}$ *ist isotroper Krümmungsstreifen,*	3. $\tilde{\mathfrak{x}}$ *ist Schmiegstreifen,*

so besitzt er auch die dritte Eigenschaft.

Vorausgesetzt ist dabei, daß a) kein konischer Streifen (Elementarkegel) vorliegt, in welchem Falle aus 3. und 1. nicht 2. folgt, und daß b) kein ebener Schmiegstreifen in einer gegen π *geneigten Ebene vorliegt, in welchem Falle aus 2. und 3. nicht 1. folgt.*

In der Tat sind diese drei Eigenschaften der Reihe nach durch die Gleichungen

1.	$\begin{vmatrix} dx & dy \\ -q & p \end{vmatrix} = 0$	1.	$\begin{vmatrix} d\tilde{x} & d\tilde{y} \\ \tilde{p} & \tilde{q} \end{vmatrix} = 0$
2.	$\begin{vmatrix} -q & p \\ -dp & -dq \end{vmatrix} = 0$	2.	$\begin{vmatrix} \tilde{p} & \tilde{q} \\ -d\tilde{q} & -d\tilde{p} \end{vmatrix} = 0$
3.	$\begin{vmatrix} -dp & -dq \\ dx & dy \end{vmatrix} = 0$	3.	$\begin{vmatrix} -d\tilde{q} & d\tilde{p} \\ d\tilde{x} & d\tilde{y} \end{vmatrix} = 0$

ausgedrückt und aus zweien davon folgt stets die dritte; ausgenommen a) den Fall, wo $dx = dy = 0$ (bzw. $d\tilde{x} = d\tilde{y} = 0$) ist, wo man aus 3. und 1. nicht auf 2. schließen kann, und b) den Fall, daß $dp = dq = 0$ (bzw. $d\tilde{p} = d\tilde{q} = 0$) ist, wo aus 2. und 3. i. a. nicht mehr 1. folgt, es sei denn, daß außerdem noch $p = q = 0$ (bzw. $\tilde{p} = \tilde{q} = 0$) wäre.

Jeder dieser beiden Sätze 43 kann aus dem anderen durch Elementenschwenkung gewonnen werden. Wir werden im nächsten Abschnitt die Bedeutung dieser Sätze für die Theorie der Eilinie kennen lernen.

XI. E. Studys Schwenkungsverfahren. Anwendung auf Eilinien. Gleichdicke und Zindlerkurven.

23. Definition und Grundeigenschaften des Studyschen Schwenkungsverfahrens[10]. Wir erklären die *Study'sche Schwenkung der Punktepaare* (E_l, E_r) als das parataktische Abbild der räumlichen Elementenschwenkung $E \to \tilde{E}$. *Das Punktepaar* (E_l, E_r) *soll also um seinen Mittelpunkt* $\overline{E}$ *um einen positiven rechten Winkel in die neue Lage* $(\tilde{E}_l, \tilde{E}_r)$ *geschwenkt werden.*

In Formeln ausgedrückt, erhält man durch parataktische Übertragung der Gleichungen (109) sofort zu dem Punktepaare

$$E_l \begin{cases} x_l = x + q \\ y_l = y - p, \end{cases} \qquad E_r \begin{cases} x_r = x - q \\ y_r = y + p, \end{cases} \tag{122}$$

das im Studyschen Sinne geschwenkte Punktepaar

$$\tilde{E}_l \begin{cases} \tilde{x}_l = x + p \\ \tilde{y}_l = y + q, \end{cases} \qquad \tilde{E}_r \begin{cases} \tilde{x}_r = x - p \\ \tilde{y}_r = y - q. \end{cases} \tag{123}$$

Ist die Punktverwandtschaft $E_l \to E_r$ parataktisches Abbild der Pfaffschen Mannigfaltigkeit

$$p = p(x, y), \quad q = q(x, y), \tag{124}$$

und bedeutet

$$\tilde{p} = \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y}) = -q(x, y), \quad \tilde{q} = \tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{y}) = p(x, y) \tag{125}$$

die daraus durch Elementenschwenkung entstehende Pfaffsche Mannigfaltigkeit, bezeichnet ferner

$$\boxed{2D = q_x - p_y, \quad 2H = p_x + q_y, \quad K = \frac{\partial(p, q)}{\partial(x, y)} = p_x q_y - p_y q_x} \tag{126}$$

[10] E. Study, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie I (Ebene analytische Kurven und zu ihnen gehörige Abbildungen). Leipzig—Berlin 1911.

so folgt für die Funktionaldeterminanten

$$(127)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial(x_l, y_l)}{\partial(x, y)} &= 1 + 2D + K, \quad \frac{\partial(r_r, v_r)}{\partial(x, y)} = 1 - 2D + K, \\ \frac{\partial(\bar{x}_l, \bar{y}_l)}{\partial(x, y)} &= 1 + 2H + K, \quad \frac{\partial(\bar{x}_r, \bar{y}_r)}{\partial(x, y)} = 1 - 2H + K. \end{aligned}$$

Die drei Größen D, H, und K sind wichtige *isotrope Invarianten der* Pfaffschen *Mannigfaltigkeit* (124), nämlich: H ihre isotrope mittlere Krümmung, K ihre isotrope Relativkrümmung und D eine neue Invariante, deren Verschwinden die integrablen Pfaffschen Mannigfaltigkeiten kennzeichnet. Mit den Invarianten $\tilde{D}, \tilde{H}, \tilde{K}$ der geschwenkten Pfaffschen Mannigfaltigkeit (125) hängen sie durch die Formeln

$$(128)\qquad \tilde{D} = H, \quad \tilde{H} = -D, \quad \tilde{K} = K$$

zusammen. Natürlich kann man auch die Punktverwandtschaft $E_l \to E_r$ selber ebenso wie die daraus durch den Studyschen Schwenkungsprozeß entstehende Verwandtschaft $\tilde{E}_l \to \tilde{E}_r$ durch diese Invarianten (gegen simultane gleichwinklige Bewegungen) kennzeichnen.

Aus den Gleichungen (127) folgt u. a. (vgl. Satz 37) der

Satz 44. *Die beiden durch das Studysche Schwenkungsverfahren miteinander verknüpften Verwandtschaften $E_l \to E_r$ und $\tilde{E}_l \to \tilde{E}_r$ sind dann und nur dann gleichzeitig eigentlich flächentreu, wenn die Invarianten D und H verschwinden, d. h., wenn diese Verwandtschaften die parataktischen Bilder zweier (konjugierter) isotroper Minimalflächen sind.*

Ebenso folgt:

Satz 45. *Eine* Pfaffsche *Mannigfaltigkeit von Flächenelementen* (124) *hat dann und nur dann eine ungleichsinnig-flächentreue Beziehung $E_l \to E_r$ als parataktisches Bild, wenn ihre isotrope Relativkrümmung $K = -1$ ist.*

Durch den Prozeß der Elementenschwenkung geht diese Eigenschaft nicht verloren; denn K ist dabei nach (128) unveränderlich. Also folgt

Satz 46. *Durch den Studyschen Schwenkungsprozeß entsteht aus einer gegensinnig-flächentreuen Punktverwandtschaft $E_l \to E_r$, und nur aus einer solchen, stets wieder eine gegensinnig-flächentreue Punktverwandtschaft $\tilde{E}_l \to \tilde{E}_r$.*

Geht man insonderheit von den Punkten E_l, E_r eines Kurvenpaares c_l, c_r aus, d. h. wählt man im isotropen Raume die Pfaffsche Mannigfaltigkeit (124) als eine Fläche ($D = 0$) der festen Relativkrümmung $K = -1$, so folgt

Satz 47. *Durch das Studysche Schwenkungsverfahren gehen die (unabhängig voneinander auf c_l und c_r gewählten) Punktepaare (E_l, E_r) zweier ebener Kurven c_l, c_r über in die Punktepaare $(\tilde{E}_l, \tilde{E}_r)$ einer gegensinnig-flächentreuen Punktverwandtschaft mit den Invarianten $\tilde{H} = 0$, $\tilde{K} = -1$.*

24. Anwendungen auf Paare ebener Kurven, insbesondere auf Eilinien. Da nach den Sätzen 14. und 18. ein Schmiegstreifen parallelbezogene, ein isotroper Krümmungsstreifen isometrische parataktische Bildkurven hat, folgt aus dem Satz 39 durch parataktische Übertragung der folgende schon von E. Study angegebene

Satz 48. *Durch den Studyschen Schwenkungsprozeß erhält man aus den Punktepaaren E_l, E_r zweier parallelbezogener ebener Kurven $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ die Punktepaare $\tilde{E}_l, \tilde{E}_r$ zweier zueinander isometrischer ebener Kurven $\tilde{\mathfrak{x}}_l, \tilde{\mathfrak{x}}_r$ und umgekehrt.*

Aus Satz 41. gewinnt man ebenfalls durch parataktische Übertragung mit Rücksicht auf die Sätze 19. und 20. bzw. 24. und 26. sofort den

Satz 49. *Den Relativscheiteln zweier parallelbezogener ebener Kurven $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ (d. h. jenen Stellenpaaren, wo das Verhältnis ihrer Krümmungen $\varkappa_l : \varkappa_r$ extrem bzw. stationär ist) entsprechen durch den Studyschen Schwenkungsprozeß jene Stellenpaare auf den entstehenden isometrischen Kurven $\tilde{\mathfrak{x}}_l, \tilde{\mathfrak{x}}_r$, welche gleiche Krümmungen ($\tilde{\varkappa}_l = \tilde{\varkappa}_r$) aufweisen, und umgekehrt.*

Um mit Hilfe dieses Satzes aus dem relativen Vierscheitelsatz (Satz 19), der sich auf zwei gleichsinnig-parallel bezogene Eilinien $\mathfrak{x}_l$, $\mathfrak{x}_r$ bezieht, den auf zwei gleichsinnig-isometrische Eilinien $\tilde{\mathfrak{x}}_l, \tilde{\mathfrak{x}}_r$ bezüglichen Vierscheitelsatz (Satz 24) zu gewinnen, haben wir nachzusehen, unter welchen Bedingungen der Studysche Schwenkungsprozeß ein Eilinienpaar der ersten Art in wieder ein Eilinienpaar der zweiten Art überführt. Nun sind nach Ziffer 9 die Bedingungen

$$0 < \varkappa < \infty, \quad |\tau| < 1 \tag{129}$$

notwendig und hinreichend für das gleichsinnig parallel bezogene Eilinienpaar $\mathfrak{x}_l$, $\mathfrak{x}_r$ unter $\varkappa$ und τ die isotrope Krümmung und Windung des parataktisch zugeordneten Schmiegstreifens $\mathfrak{x}$ verstanden. Für den isotropen Krümmungsstreifen $\tilde{\mathfrak{x}}$, der daraus durch Elementenschwenkung entsteht, ist nach (120)

$$\tilde{\varkappa}\,\tilde{\vartheta}| = |\operatorname{tang}\tilde{\omega}| = |\tau| < 1, \text{ d. h. } |\tilde{\omega}| < \frac{\pi}{4};$$

also werden nach (92) die isometrischen Bildkurven $\tilde{\mathfrak{x}}_l$ und $\tilde{\mathfrak{x}}_r$ des Krümmungsstreifens $\tilde{\mathfrak{x}}$ ebenfalls eiförmig sein, wenn (und nur wenn)

$$|\tilde{\omega}'| = |(\operatorname{arc\,tang}\tilde{\varkappa}\,\tilde{\vartheta})'| = |(\operatorname{arc\,tang}\tau)'| = \frac{|\tau'|}{1+\tau^2} < \varkappa \tag{130}$$

ist. Es folgt

Satz 50. *Unter den Voraussetzungen* (129) *und* (130) *entsteht aus dem gleichsinnig-parallel bezogenen Eilinienpaar $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ durch den Studyschen Schwenkungsprozeß stets ein gleichsinnig-isometrisches Eilinienpaar $\tilde{\mathfrak{x}}_l, \tilde{\mathfrak{x}}_r$ und umgekehrt. Diese Bedingungen sind notwendig und hinreichend. Sind sie erfüllt, so kann allein durch das mit der Studyschen Schwenkung verbundene Übertragungsprinzip der*

Vierscheitelsatz über Paare gleichsinnig isometrischer Eilinien aus dem Vierscheitelsatz über Paare gleichsinnig parallel bezogener Eilinien gewonnen werden und umgekehrt.

Wir wollen endlich noch das Satzpaar gewinnen, das sich durch parataktische Übertragung aus dem Satze 43 (d. h. dem Satz von JOACHIMSTHAL für ebene Krümmungsstreifen und seinem Gegenstück für Schmiegstreifen) ergibt. Wir stützen uns dabei auf das Ergebnis der Ziffer **20** (vgl. die Übersicht daselbst) und finden:

Satz 51. *Kann man in einer Eilinie c die Sehne $\overline{E_l E_r}$ so herumführen, daß zwei der folgenden Eigenschaften zutreffen:*

1. *Die durch die Sehnen $\overline{E_l E_r}$ von der Eilinie abgeschnittenen Segmente haben konstanten Flächeninhalt (oder: die Sehnen berühren ihren Mittenort),*	1. *Die Sehnen $\overline{E_l E_r}$ durchsetzen ihren Mittenort orthogonal,*
2. *Die Sehnen $\overline{E_l E_r}$ haben konstante Länge,*	2. *Die Sehnen $\overline{E_l E_r}$ haben konstante Länge,*
3. *Die Sehnen $E_l E_r$ schneiden von der Eilinie Bogen konstanter Länge ab,*	3. *Die Tangenten der Eilinie in den Endpunkten der Sehnen $\overline{E_l E_r}$ sind zueinander parallel,*

so trifft auch die dritte Eigenschaft zu.

Vorausgesetzt ist dabei, daß die Eilinie keinen Mittelpunkt hat (in welchem Falle nämlich für die Durchmesser aus 3. *und* 1. *nicht* 2. *gefolgert werden kann).*

Der rechte Teil dieses Doppelsatzes ist seit langem wohlbekannt und eigentlich evident. Den linken Teil hat jedoch wohl erst E. SALKOWSKI[11]) bemerkt.

Bemerkung 1. Der eben formulierte Doppelsatz gilt nach seiner Herleitung allgemeiner ebenso für irgend zwei verschiedene ebene Kurven c_l und c_r an Stelle der einzigen Eilinie c. In diesem allgemeineren Falle ist aber zusätzlich noch vorauszusetzen, daß die beiden Kurven c_l und c_r nicht-schiebungskongruent sind, in welchem Falle nämlich für die Schiebsehnen aus 2. und 3. nicht mehr auf 1. geschlossen werden kann.

Bemerkung 2. Diese allgemeinere Fassung für Kurvenpaare hat vor allem den Vorteil, daß für sie die beiden Seiten des Satzes miteinander durch das

---

[11]) E. SALKOWSKI, Eine kennzeichnende Eigenschaft des Kreises. Sitz.-Ber. Heidelberger Akad. Wiss. (1934) 14. Abh. S. 57—62.

H. GERICKE, Einige kennzeichnende Eigenschaften des Kreises. Math. Zeitschr. **40** (1936) S. 417—420.

H. AUERBACH, Sur un problème de M. ULAM concernant l'équilibre des corps flottants, Studia Math. **7** (1938) S. 121—142. (Dem Verf. nicht zugänglich.)

H. GEPPERT, Über einige Kennzeichnungen des Kreises. Math. Zeitschr. **46** (1940) S. 117—128.

Übertragungsprinzip des STUDYschen Schwenkungsverfahrens zusammenhängen und damit auseinander ohne weiteres gefolgert werden können. Dieser Vorteil geht i. a. verloren, wenn man sich, wie es bei Satz 51 geschah, auf einzelne Eilinien $c_l = c_r = c$ beschränkt.

Beispiel 1. Die einfachste Eilinie, an der eine Sehnenschar (sogar eine stetige Mannigfaltigkeit von ∞^1 solchen Scharen) fester Segmentfläche, fester Länge und festen Kurvenbogens existiert, ist der Kreis. Durch das STUDYsche Schwenkungsverfahren erhält man aus einer solchen Schar von Kreissehnen zwei i. a. verschiedene parallelbezogene konzentrische Kreise, die nur dann zusammenfalien, wenn die gewählten Sehnen Kreisdurchmesser sind.

Bemerkung 3. Dieses Zerfallen der Kurve nach Ausführung des STUDYschen Schwenkungsverfahrens auf eine Sehnenschar, welche die drei Eigenschaften der linken oder rechten Serie in Satz 51 besitzt, ist eine allgemein zu erwartende Erscheinung.

Daß es überhaupt vom Kreise verschiedene Eilinien gibt, mit Sehnenscharen, welche eine der beiden Dreierserien von Eigenschaften aus Satz 51 besitzen, beweist einerseits für die linke Serie das interessante Beispiel der von K. ZINDLER[12]) entdeckten *Eilinien mit einer Schar Flächen- und Umfangshalbierender Sehnen fester Länge*, andrerseits für die rechte Serie das altbekannte Beispiel der *Kurven fester Breite* (*Gleichdicke* der Techniker). Wir werden sehen, daß unter einer gewissen, die Eiform garantierenden Voraussetzung, diese sogenannten *ZINDLER-Kurven* und die *Gleichdicke* einander durch das *STUDYsche Schwenkungsverfahren* entsprechen und damit samt ihren wichtigsten Eigenschaften auseinander in einfachster Weise gewonnen werden können. Es gilt

Satz 52. *Außer dem Kreise und den allgemeinen Gleichdicken gibt es keine weiteren Eilinien, in denen eine Sehne* $\overline{E_l E_r}$ *fester Länge* $2a$ *so herumgeführt werden kann, daß die Tangenten in ihren Enden immer parallel sind (und folglich ihr Mittenort orthogonal durchsetzt wird).*

Die beiden letztgenannten Eigenschaften bedeuten nämlich die Existenz einer Schar von Doppelnormalen; da deren Länge $2a$ außerdem konstant sein soll, handelt es sich in der Tat um Eilinien fester Breite (Gleichdicke).

Dementsprechend vermutet man auch, daß es außer dem *Kreise* und den *ZINDLERkurven keine weiteren Eilinien* gibt, bei denen über den Sehnen einer (einzigen) festen Länge stets Flächen festen Inhalts und Bogen fester Länge ruhen; alle bisherigen Beweisversuche dafür sind aber gescheitert[13]).

---

[12]) K. ZINDLER, Monatshefte f. Math. u. Phys. **31** (1921), S. 44/45. — Eine ausführlichere Untersuchung der ZINDLERkurven, insbesondere die Darstellung der allgemeisten Kurven dieser Art verdankt man H. AUERBACH[11]) und vor allem H. GEPPERT[11]).

[13]) Vgl. die Literaturausgaben bei H. GEPPERT[11]). — Auch der von H. GEPPERT[11]) selber geführte Beweis ist nach K. BRAUNER und H. R. MÜLLER[14]) nicht stichhaltig.

Man kann jedoch, wie E. Salkowski[11]), K. Brauner und H. R. Müller[14]) gezeigt haben, leicht nicht-geschlossene Linien dieser Art konstruieren. Sie hängen von einer willkürlichen Funktion und der Lösung einer Riccatischen Differentialgleichung ab.

25. Gleichdicke und Zindlerkurven. Durch seine Doppelnormalen ist ein Gleichdick c der Dicke $\overline{E_l E_r} = 2a$ so auf sich selbst bezogen, daß sich ungleichsinnig-parallele Tangenten entsprechen. Durch parataktische Abbildung entspricht daher dem Gleichdick nach Satz 43 (rechts) ein Streifen C mit den folgenden Eigenschaften:

1. C ist Fallstreifen gegen die Bildebene π,
2. C ist Böschungsstreifen gegen π der Böschung a,
3. C ist Schmiegstreifen der isotropen Torsion $|\tau| < 1$;
4. C ist zur Bildebene π symmetrisch,
5. C ist geschlossen.

Die beiden letztgenannten Eigenschaften folgen aus der Vertauschbarkeit der Endpunkte E_l, E_r der Doppelnormalen und aus der Gleichheit der Flächeninhalte der (identischen) linken und rechten Bildkurve $c_l = c_r = c$.

Bedeutet $\varrho < 2a$ den Krümmungsradius des Gleichdicks c, so ist

$$\varkappa = \frac{1}{\varrho - a} \tag{131}$$

die Krümmung seiner Mittenkurve $\bar{c}$ und

$$\tau = \frac{a}{\varrho - a} \tag{132}$$

die isotrope Torsion des Schmiegstreifens C. Der Schmiegstreifen ist nämlich auch Böschungstreifen, also muß das Verhältnis

$$\frac{\tau}{\varkappa} = \text{const.} = a.$$

nämlich gleich der festen Neigung a des Böschungsstreifens sein.

Durch räumliche Elementenschwenkung entspricht nun einem solchen Streifen C ein neuer Streifen $\tilde{C}$ mit folgenden fünf Eigenschaften, die sich unmittelbar aus Ziffer **22** ergeben:

1. $\tilde{C}$ ist Schichtenstreifen in der Bildebene π.
2. $\tilde{C}$ ist Böschungsstreifen bezüglich π,
3. $\tilde{C}$ ist isotroper Krümmungsstreifen,
4. $\tilde{C}$ ist zur Bildebene π symmetrisch,
5. $\tilde{C}$ ist geschlossen.

---

[14]) K. Brauner und H. R. Müller, Über Kurven, welche von den Endpunkten einer bewegten Strecke mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen werden. Math. Zeitschr. **47** (1941) S. 291—317.

Seine Krümmung $\tilde{\varkappa}$ (und die seiner Mittenkurve $\tilde{c}$ und seine isotrope Normalkrümmung $\tilde{\varkappa}\tilde{\vartheta}$ sind mit den Invarianten von C nach (120) durch die folgenden Gleichungen verbunden:

$$(133)\qquad \begin{cases} \tilde{\varkappa} = \varkappa = \dfrac{1}{\varrho - a}, \\ \tilde{\varkappa}\tilde{\vartheta} = -\tau = -\dfrac{a}{\varrho - a} = \operatorname{tang}\tilde{\omega}. \end{cases}$$

Kehren wir durch die parataktische Abbildung wieder in die Ebene zurück, so entspricht diesem isotropen *Krümmungsstreifen* $\tilde{C}$ eine sogenannte *Zindlerkurve* und zwar die allgemeinste ihrer Art. Die Streifen C und $\tilde{C}$ hängen im Raume durch Elementenschwenkung, das *Gleichdick* c und die *Zindlerkurve* $\tilde{c}$ also durch das *Studysche Schwenkungsverfahren* zusammen. Nach (92) ist diese Zindlerkurve dabei dann und nur dann eine Eilinie, wenn

$$|(\operatorname{arc\,tang}\tilde{\varkappa}\tilde{\vartheta})'| = \frac{|(\tilde{\varkappa}\tilde{\vartheta})'|}{1 + (\tilde{\varkappa}\tilde{\vartheta})^2} < |\tilde{\varkappa}|,$$

d. h., wenn

$$(134)\qquad |\varrho'| < \frac{a^2 + (\varrho - a)^2}{a\,|\varrho - a|}$$

ist.

Durch parataktische Übertragung der genannten fünf Eigenschaften des isotropen Krümmungsstreifens $\tilde{C}$ erhält man die folgenden kennzeichnenden Eigenschaften der Zindlerkurven:

Satz 53. *Bei jeder Zindlerkurve $\tilde{c}$ existiert eine Schar von ∞^1 Sehnen $\overline{\tilde{E}_l \tilde{E}_r}$, welche*

1. *von ihr konstante Flächenstücke abschneiden,*
2. *konstante Längen haben,*
3. *konstante Bogenstücke abschneiden, wobei*
4. *die Endpunkte $\tilde{E}_l$, $\tilde{E}_r$ der Sehnen vertauschbar sind, sodaß*
5. *die von ihnen beschriebenen Kurven $\tilde{c}_l$ und $\tilde{c}_r$ mit $\tilde{c}$ zusammenfallen und flächengleich sind.*

Wegen 4. halbieren diese Sehnen fester Länge sowohl die Fläche als auch den Umfang der Zindlerkurve. Wir nennen sie daher kurz Hauptsehnen der Zindlerkurve.

Ferner haben wir erkannt:

Satz 54. *Jedes ebene Gleichdick c liefert unter der Voraussetzung* (134) *mittels des Studyschen Schwenkungsverfahrens eine Zindlerkurve $\tilde{c}$, in der man, den ∞^1 Doppelnormalen fester Länge des Gleichdicks c entsprechend, eine Sehne fester Länge so herumführen kann, daß sie beständig sowohl die Fläche als auch den Umfang der Zindlerkurve halbiert.*

Umgekehrt ergibt auch jede Zindlerkurve *durch* Studysche Schwenkung *ein Gleichdick.*

Man kann diesen einfachen Sachverhalt auch so aussprechen[15]):

Satz 55. *Bewegt sich ein festes Quadrat in der Ebene so, daß die eine Diagonale stets Doppelnormale einer Kurve fester Breite ist, so ist unter der Voraussetzung* (134) *die andere Diagonale stets umfang- und inhalthalbierende Sehne einer* Zindlerkurve *und umgekehrt.*

Wie man diesen Zusammenhang verwenden kann, um aus bekannten Eigenschaften der Gleichdicke solche der Zindlerschen Kurven zu gewinnen (oder umgekehrt) sollen noch die folgenden Beispiele beleuchten.

Beispiel 2. Ein *Gleichdick* c (mit stetig ableitbarer Krümmung) hat bekanntlich *mindestens drei Paare von Scheiteln* ($\varkappa_l = \varkappa_r = 0$), nämlich die Endpunkte jener Doppelnormalen, welche zu den (mindestens drei) Spitzen seiner Evolute gehören. — Dementsprechend hat nach Satz 49 *eine* Zindlerkurve $\tilde{c}$ *mindestens drei Hauptsehnen, in deren Endpunkten* $\tilde{E}_l$, $\tilde{E}_r$ *sie gleiche Krümmung* ($\tilde{\varkappa}_l = \tilde{\varkappa}_r$) *aufweist.*

Beispiel 3. Nach dem eben Erwähnten hat ein *Gleichdick* c auch mindestens *drei Doppelnormalen*, in deren Endpunkten E_l, E_r sie *absolut gleiche Krümmung* aufweist, d. h. wo $\varkappa_l + \varkappa_r = 0$ und das Gleichdick im kleinen isometrisch ist ($ds_l + ds_r = 0$). — Dementsprechend besitzt[16]) eine Zindlerkurve $\tilde{c}$ nach Satz 48 *mindestens drei Doppelnormalen*, nämlich Hauptsehnen, in deren Endpunkten $\tilde{E}_l$, $\tilde{E}_r$ die Tangenten gegensinnig-parallel sind. Sie gehören zu den (mindestens drei) Spitzen der Mittenkurve $\bar{c}$ der Zindlerkurve.

Bemerkung 4. Aus dem Ergebnis von Beispiel 2 folgt sofort, daß jede Zindlerkurve *mindestens* $3 \cdot 2 = 6$ *Scheitel* hat[16]), die i. a. allerdings sich *nicht* notwendig paarweise auf drei Hauptsehnen verteilen müssen.

XII. Räumliche Ableitung zweier Kennzeichnungen des Kreises.

26. Die isotropen Krümmungsverhältnisse der Fläche Φ. Wir haben in Nr. 20 die Punktepaare (E_l, E_r) einer Eilinie c als parataktische Bilder der Berührungselemente E einer durch c bestimmten Fläche Φ der festen Relativkrümmung $K = -1$ deuten gelernt. Diese Fläche Φ hat den ebenen Schmiegstreifen von c als *Rückkehrkante* und ist zur Ebene π von c symmetrisch. Die Fläche Φ ist endlich periodisch in z mit der Ganghöhe $h = \frac{1}{2}F(c)$, unter F die Fläche von c verstanden.

Wir wollen abschließend an zwei Kennzeichnungen des Kreises nochmals *zeigen, in welch einfacher Weise sich ebene Fragestellungen über die Eilinie c auf räumlichem (isotropem) Wege mit Hilfe der zugehörigen Fläche* Φ *lösen lassen.*

[15]) Vgl. H. Auerbach[11]).

[16]) Vgl. H. Geppert[11]).

Wir benötigen dazu den folgenden

Satz 55. *Es sei* $2\omega = \widehat{t_l t_r}$ *der Winkel, den die Tangenten* t_l, t_r *in den Punkten* E_l, E_r *der Eilinie* c *einschließen. Die zu* c *gehörige Fläche* Φ *der Relativkrümmung* $K = -1$ *hat dann in dem parataktisch entsprechenden Flächenelemente* E *die isotrope mittlere Krümmung*

$$H = -\operatorname{cotang} 2\omega \tag{135}$$

und die isotropen Hauptnormalkrümmungen

$$\frac{1}{R_1} = \operatorname{tang}\omega, \quad \frac{1}{R_2} = -\operatorname{cotang}\omega. \tag{136}$$

der erste Wert gilt dabei für die geschlossene, der zweite für die offene (periodische) isotrope Krümmungslinie durch E.

Der Beweis dieses einfachen Satzes fließt sofort aus der Formel (70).

27. Eine erste Kennzeichnung des Kreises. Wir beweisen durch räumliche isotrope Mittel unter Heranziehung der Fläche Φ zuerst den folgenden

Satz 56. *Kann man in einer Eilinie* c *eine Sehne fester Länge* $\overline{E_l E_r} = l$ *so herumführen, daß sie stets gleiche Bogen (und daher auch gleiche Flächenstücke) abschneidet, und ist außerdem noch der Schnittwinkel* 2ω *ihrer Tangenten in den Sehnenenden konstant, so ist die Eilinie notwendig ein Kreis.*

Beweis. Nach Nr. **20** ist der Streifen, welcher den Lagen der Sehne $E_l E_r$ auf der durch c bestimmten Fläche Φ entspricht, zugleich 1. ein (geschlossener) isotroper Krümmungsstreifen, 2. Böschungsstreifen und 3. Schichtenstreifen bezüglich der Ebene π von c. Die Streifenkurve (Schichtenlinie auf Φ) heiße k. Nach (136) hat wegen des festen Tangentenwinkels die isotrope Normalkrümmung des Krümmungsstreifens den konstanten Wert

$$\frac{1}{R_1} = \operatorname{tang}\omega = \text{const}.$$

Da der Streifen gegen die Ebene π feste Böschung ϑ hat, wird [nach dem isotropen Meusnierschen Satze, d. h. nach (38)] auch die isotrope Krümmung $\varkappa$ der Schichtenlinie k konstant sein, und da für Schichtenlinien die isotrope Krümmung mit der gewöhnlichen Krümmung zusammenfällt, ist zunächst k ein Kreis.

Dann ist aber der längs k der Fläche Φ umschriebene Böschungsstreifen ein kreisförmiger Streifen auf einem Drehkegel, und da Φ auch durch diesen drehsymmetrischen Streifen eindeutig bestimmt ist, ist Φ selber eine Drehfläche.

Dann ist aber auch die Eilinie c als Rückkehrkante der Drehfläche Φ drehsymmetrisch, d. h. c ist in der Tat ein Kreis.

28. Eine zweite Kennzeichnung des Kreises. Wir beweisen zum Schlusse auf ähnliche räumlich-isotrope Art mittels der Fläche Φ den folgenden

Satz 57. *Es variiere die Länge l stetig im Intervalle $0 \leqq l \leqq L$. Ist dann c eine Eilinie, bei der über den Sehnen $E_l E_r$ der beliebig, aber fest aus dem Intervalle $0 \leqq l \leqq L$ entnommenen Länge l stets Bogen fester Länge s $(0 \leqq s \leqq S)$ ruhen [und damit auch Segmente fester Fläche f $(0 \leqq f \leqq F)$], so ist die Eilinie c notwendig ein Kreis.*[17])

Beweis. Nach Annahme gibt es dann nämlich nach Nr. **20** auf der durch c bestimmten Fläche Φ eine stetige Schar von Schichtenlinien in horizontalen (zu π parallelen) Ebenen, welche isotrope Krümmungslinien sind. Folglich sind auch die Fallinien von Φ isotrope Krümmungslinien.

Das isotrope *sphärische Bild* des Systems der Krümmungslinien der Fläche Φ besteht also (nach dem Satze von JOACHIMSTHAL) aus einem *System konzentrischer Kreise (Bild der Schichtenlinien) mit ihren Durchmessern (Bild der Fallinien).* Die Fallinien von Φ sind also zylindrische Kurven; die längs ihnen der Fläche Φ umschriebenen Krümmungsstreifen liegen dabei *auf Zylindern horizontaler Erzeugendenrichtung.* Die Verbindungssehnen $\overline{E_l E_r}$ der parataktischen Bildpaare einer jeden Fallinie sind daher zueinander parallel; umgekehrt liefern parallele Sehnen der Eilinie c die parataktischen Bildpaare E_l, E_r der Flächenelemente E einer Fallinie von Φ. Weil diese Fallinien zugleich isotrope Krümmungslinien sind, schneiden *parallele Sehnen* aus der Eilinie c stets *gleiche Bogenstücke* aus (und umgekehrt).

Die Eilinie c hat also notwendig die Eigenschaft, daß parallele Sehnen (des genannten Intervalls) aus ihr gleiche Bogenstücke ausschneiden, und daß umgekehrt zu gleichen Bogenstücken parallele Sehnen gehören.

Dann gilt aber für die Eilinie c der PASCALsche Satz, wie man erkennt, wenn man durch ein beliebig angenommenes Bogenstück 1 zwei verschiedene Parallelenpaare legt: die beiden von ihnen ausgeschnittenen Bogen 2 und 3 sind dann nämlich gleich, liegen also ebenfalls auf einem dritten parallelen Sehnenpaar.

Die Eilinie c ist also ein Kegelschnitt (Ellipse), und weil irgendzwei parallele Sehnen stets gleiche Bogen ausschneiden sollen, ist sie notwendig ein Kreis. W. z. b. w.

---

[17]) K. YANAGIHARA, On some properties of simply closed convex curves and surfaces. Science Rep. Tohôku Imper. Univ. **4** (1915), S. 65—77.

J. HIRAKAWA, On a characteristic property of the circle, Tohôku Math. Journ. **37** (1933) S. 175—178.

K. BRAUNER — H. R. MÜLLER [14]), insbes. S. 295 und S. 311.

(Eingegangen am 19. Juli 1945.)

Zur Theorie der Tschebyscheffschen Polynome.

Von

P. Heuser in Darmstadt *).

Es sei $\mathfrak{U}_x$ eine einfach zusammenhängende Umgebung des Punktes ∞ in der x-Ebene mit mindestens zwei Randpunkten. Die Funktion

$$x = \psi(t) = t + a_0 + \frac{a_1}{t} + \cdots \tag{1}$$

bilde das Kreisäußere $|t| > r_0$ konform auf $\mathfrak{U}_x$ ab. Die Zahlen $a_0, a_1, \ldots$ und r_0 sind dadurch eindeutig festgelegt. Es kann durch eine Parallelverschiebung $x - a_0 = x'$ immer erreicht und daher von vornherein angenommen werden, daß $a_0 = 0$ ist. Es sei $r_0 < r < \infty$; das durch die Abbildung (1) in der x-Ebene hergestellte Bild des Kreises $|t| = r$ bezeichnen wir mit C_r.

Zu jeder Kurve C_r und zu jedem n gehört ein Tschebyscheffsches Polynom $t_n(r; x)$, das durch die folgenden Eigenschaften eindeutig bestimmt ist:

a) $t_n(r; x)$ ist in x vom Grade n,

b) der Koeffizient von x^n ist 1,

c) alle von $t_n(r; x)$ verschiedenen Polynome, welche auch die Eigenschaften a) und b) haben, besitzen auf C_r ein Maximum des absoluten Betrages, das größer ist als das Maximum von $|t_n(r; x)|$ auf C_r.

Neben diesem Tschebyscheffschen Polynom $t_n(r; x)$ betrachten wir das Fabersche Polynom $n$ten Grades $p_n(x)$ [1]), das durch

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x$$

und im übrigen dadurch eindeutig definiert werden kann, daß es als Funktion von t eine Darstellung besitzt

$$p_n(x) = p_n(\psi(t)) = t^n + \frac{1}{t}\mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{t}\right), \tag{2}$$

*) Eine erste Niederschrift der vorliegenden Arbeit übergab ich vor meiner Wiedereinberufung zur Wehrmacht meinem Freunde Prof. Max Müller in Tübingen zur Durchsicht. Ich danke Herrn Müller wärmstens dafür, daß er nicht nur meine Ausführungen nachprüfte, sondern auch die endgültige Abfassung der Arbeit übernahm, als ich selbst durch Einsatz an der Ostfront daran verhindert war.

[1]) G. Faber, Über Tschebyscheffsche Polynome. Journ. f. die reine und angew. Mathematik **150** (1920), S. 79—106.

wo $\mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{t}\right)$ eine mindestens für $|t| > r_0$ konvergente Potenzreihe in $\frac{1}{t}$ bedeutet[2]). Ersetzt man $\mathfrak{U}_x$ durch das Äußere der Kurve C_r, so erhält man wieder die Abbildungsfunktion $w(t)$ und wird auf dasselbe Fabersche Polynom $p_n(x)$ geführt. Zu allen Kreisbildern C_r desselben Außengebietes $\mathfrak{U}_x$ gehört also dasselbe Fabersche Polynom $n$ter Ordnung.

Während Herr Faber im Hinblick auf die Behandlung von Reihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n t_n(r; x)$$

hauptsächlich die Beziehung zwischen den $t_n(r; x)$ und den $p_n(x)$ bei festem r und wachsendem n betrachtet[3]), wird im folgenden der Zusammenhang zwischen diesen Polynomen bei festem n und unbegrenzt wachsendem r untersucht. Es wird gezeigt, daß $t_n(r; x)$ stetig von r abhängt und bei unbegrenzt wachsendem r in jedem beschränkten Teil der x-Ebene gleichmäßig gegen $p_n(x)$ konvergiert.

Wenn also für alle Kreisbilder C_r in einem Bereich $\mathfrak{U}_x$ die Tschebyscheffschen Polynome dieselben, d. h. unabhängig von r sind, sind sie mit den Faberschen Polynomen identisch.

§ 1.

Die $t_n(r; x)$ hängen stetig von r ab.

Daß $t_n(r; x)$ eine stetige Funktion von r ist, ergibt sich unmittelbar aus folgendem Satz:

Ist $\{r_m\}$ eine konvergente Folge von Zahlen, die größer als r_0 sind, und auch

$$\lim_{m \to \infty} r_m = r_* > r_0, \tag{3}$$

so ist

$$\lim_{m \to \infty} t_n(r_m; x) = t_n(r_*; x). \tag{4}$$

Beweis: Nach der Eigenschaft c) der Tschebyscheffschen Polynome ist

$$\operatorname*{Max}_{C_r} |t_n(r; x)| \leqq \operatorname*{Max}_{C_r} |p_n(x)|.$$

Wenn aber x auf C_r liegt, ist $|t| = r$ und daher nach (2)

$$|p_n(x)| \leqq r^n + \frac{1}{r} \operatorname*{Max}_{C_r} \left|\mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leqq r^n + \frac{1}{r} M_n(r),$$

[2]) Vgl. G. Faber, a. a. O., S. 83, Gl. (13), wo nur gemäß unseren Festlegungen t durch $\frac{1}{t}$ zu ersetzen ist.

[3]) A. a. O., § 5.

wo $M_n(r)$ eine nicht steigende Funktion von r ist. Es ist also auch

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{Max} |t_n(r;x)| \leqq r^n + \frac{1}{r} M_n(r) \qquad (r_0 < r < \infty).$$

Nunmehr sei $\underline{r}$ eine untere, $\bar{r}$ eine obere Schranke der Zahlen r_m. Da $r_* > r_0$ vorausgesetzt ist, kann $\underline{r} > r_0$ angenommen werden. Dann ist nach (5) im abgeschlossenen Innern $\overline{I(C_{\underline{r}})}$ der Kurve $C_{\underline{r}}$

$$\text{(6)} \qquad |t_n(r_m;x)| \leqq \bar{r}^n + \frac{1}{\underline{r}} M_n(\underline{r}) \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Die Polynome $t_n(r_m;x)$ sind also in $\overline{I(C_{\underline{r}})}$ gleichmäßig beschränkt. Daher kann man eine Indexteilfolge $m_1, m_2, \ldots, m_\lambda, \ldots$ derart finden, daß die Polynome $t_n(r_{m_\lambda};x)$ für $\lambda \to \infty$ gegen ein Polynom $T_n(x)$ vom $n$ten Grade konvergieren, in welchem x^n den Koeffizienten 1 hat. Wir wollen zeigen, daß, wie auch sonst die Teilfolge $m_1, m_2, \ldots$ gewählt wurde,

$$T_n(x) = t_n(r_*;x)$$

ist.

Wäre dies nicht der Fall, so müßte nach c)

$$\operatorname*{Max}_{C_{r_*}} |T_n(x)| > \operatorname*{Max}_{C_{r_*}} |t_n(r_*;x)|$$

sein, also, wenn

$$\operatorname*{Max}_{C_{r_*}} |t_n(r_*;x)| = \mu > 0$$

gesetzt wird,

$$\operatorname*{Max}_{C_{r_*}} |T_n(x)| = \mu + 2\varepsilon,$$

wo ε eine positive Zahl ist. Ist x_* ein Punkt von C_{r_*}, wo

$$|T_n(x^*)| = \operatorname*{Max}_{C_{r_*}} |T_n(x)| = \mu + 2\varepsilon,$$

und $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ eine Folge von Punkten die gegen x_* konvergiert und bei der x_k auf C_{r_k} liegt[4]), so ist

$$\lim_{\lambda \to \infty} |t_n(r_{m_\lambda};x_\lambda)| = |T_n(x_*)| = \mu + 2\varepsilon,$$

also von einem gewissen Index $\lambda = \lambda_0$, ab

$$|t_n(r_{m_\lambda};x_\lambda)| > \mu + \varepsilon$$

und erst recht

$$\text{(7)} \qquad \operatorname*{Max}_{C_{r_{m_\lambda}}} |t_n(r_{m_\lambda};x)| > \mu + \varepsilon.$$

Da

$$\operatorname*{Max}_{C_{r_*}} |t_n(r_*;x)| = \mu$$

und $t_n(r_*;x)$ durchweg stetig ist, ferner von einer gewissen Nummer

[4]) Eine solche Punktfolge gibt es, weil zu jedem $\delta > 0$ für hinreichend großes m die Kurve C_{r_m} ganz in der δ-Umgebung der Kurve C_{r_*} verläuft.

$\lambda = \lambda_1$ ab die Kurve C_{r_m} in einer beliebig kleinen Umgebung von C_{r_*} verläuft, ist für $\lambda \geqq \lambda_1$

$$\text{(8)} \qquad \operatorname*{Max}_{C_{r_{m_\lambda}}} |t_n(r_*; x)| > \mu + \varepsilon.$$

Für $\lambda \geqq \operatorname{Max}(\lambda_0, \lambda_1)$ wäre nach (7) und (8)

$$\operatorname*{Max}_{C_{r_{m_\lambda}}} |t_n(r_*; x)| < \operatorname*{Max}_{C_{r_{m_\lambda}}} |t_n(r_{m_\lambda}; x)|,$$

was der Eigenschaft c) der TSCHEBYSCHEFFschen Polynome widerspricht.

Damit ist zunächst bewiesen, daß für jede gegen r_* strebende Folge von Radien $r_{m_1}, r_{m_2}, \ldots, r_{m_\lambda}, \ldots$, für welche überhaupt $\lim_{\lambda \to \infty} t_n(r_{m_\lambda}; x)$ existiert, dieses Grenzpolynom gleich $t_n(r_*; x)$ ist. Nehmen wir nun an, daß die vollständige Folge $\{t_n(r_m; x)\}$ nicht konvergiert. Dann gibt es mindestens eine Stelle ξ, wo die Folge $\{t_n(r_m; \xi)\}$ zwei verschiedene Häufungswerte h' und h'' hat. Wir können eine Teilfolge $m_1', m_2', \ldots$ und eine Teilfolge $m_1'', m_2'', \ldots$ derart finden, daß

$$\text{(9)} \qquad \lim_{\lambda \to \infty} t_n(r_{m_\lambda'}; \xi) = h', \quad \lim_{\lambda \to \infty} t_n(r_{m_\lambda''}; \xi) = h''.$$

Aus der Folge $m_1', m_2', \ldots$ kann man wiederum eine Teilfolge $\bar{m}_1', \bar{m}_2', \ldots$ herausheben, so daß

$$\lim_{\lambda \to \infty} t_n(r_{\bar{m}_\lambda'}; x) = \bar{T}_n(x)$$

existiert, und aus der Folge $m_1'', m_2'', \ldots$ kann man eine Teilfolge $\bar{m}_1'', \bar{m}_2'', \ldots$ aussondern, so daß

$$\lim_{\lambda \to \infty} t_n(r_{\bar{m}_\lambda''}; x) = \bar{\bar{T}}_n(x)$$

existiert. Nach (9) wäre

$$\bar{T}_n(\xi) = h' \neq h'' = \bar{\bar{T}}_n(\xi).$$

Dies widerspricht aber der im vorigen Abschnitt des Beweises gewonnenen Feststellung, daß

$$\bar{T}_n(x) = t_n(r_*; x), \quad \bar{\bar{T}}_n(x) = t_n(r_*; x)$$

sein muß.

Damit ist nun bewiesen, daß $\lim_{m \to \infty} t_n(r_m; x)$ existiert und überdies die Beziehung (4) gilt.

§ 2.

$t_n(r; x) \to p_n(x)$ für $r \to \infty$.

Wir wollen nun zeigen, daß auch $\lim_{r \to \infty} t_n(r; x)$ *existiert und daß diese Grenzfunktion mit* $p_n(x)$ *identisch ist. In jedem abgeschlossenen endlichen Teil der* x*-Ebene ist dieser Grenzübergang gleichmäßig in* x.

Zum Beweise entwickeln wir $t_n(r;x)$ nach den Polynomen $p_\nu(x)$ und erhalten [5])

$$(10)\qquad t_n(r;x) = p_n(x)+b_1(r)\,p_{n-1}(x)+\cdots+b_{n-1}(r)\,p_1(x)+b_n(r).$$

Nach (2) ist also, wenn $t = r\tau$ gesetzt wird, auf dem Kreise $|\tau| = 1$

$$\begin{aligned} t_n(r;x) &= t_n(r;\psi(r\tau)) \\ &= p_n(\psi(r\tau))+b_1(r)\,r^{n-1}\tau^{n-1}+\cdots+b_{n-1}(r)\,r\tau+b_n(r)+ \\ &+\frac{1}{r\tau}\left\{b_1(r)\,\mathfrak{P}_{n-1}\left(\frac{1}{r\tau}\right)+\cdots+b_{n-1}(r)\,\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{r\tau}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$(11)\qquad B(r) = \operatorname{Max}\{|b_1(r)|\,r^{n-1},\ |b_2(r)|\,r^{n-2},\ \ldots,\ |b_{n-1}(r)|\,r,\ |b_n(r)|\}.$$

Ist $B(r) = 0$ für alle hinreichend großen r, etwa für $r > \tilde{r}$, so ist nach (10) $t_n(r;x) \equiv p_n(x)$ für $r > \tilde{r}$ und unsere Behauptung trivial. Andernfalls gibt es beliebig große r, für die $B(r) > 0$ ist. Für diese r kann

$$(12)\qquad t_n(r;x) = p_n(x) + B(r)\left\{Q_{n-1}(r;\tau)+\zeta\left(r;\frac{1}{\tau}\right)\right\}$$

geschrieben werden, wobei

$$(13)\qquad Q_{n-1}(r;\tau) = \frac{b_1(r)\,r^{n-1}}{B(r)}\,\tau^{n-1}+\cdots+\frac{b_n(r)}{B(r)},$$

also nach (11)

$$(14)\qquad |Q_{n-1}(r;\tau)| \leqq n \qquad \text{für } |\tau| = 1,$$

und

$$(15)\qquad \zeta\left(r;\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{r\tau}\left\{\frac{b_1(r)}{B(r)}\,\mathfrak{P}_{n-1}\left(\frac{1}{r\tau}\right)+\cdots+\frac{b_{n-1}(r)}{B(r)}\,\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{r\tau}\right)\right\},$$

also für $|\tau| = 1$

$$(16)\qquad \left|\zeta\left(r;\frac{1}{\tau}\right)\right| \leqq \frac{1}{r}\{M_{n-1}(r)+\cdots+M_1(r)\};$$

mit unbeschränkt wachsendem r strebt also $\zeta\left(r;\frac{1}{\tau}\right)$ auf dem Kreis $|\tau| = 1$ gleichmäßig gegen Null.

Es sei nun $\{r_m\}$ eine Folge oberhalb r_0 gelegener und gegen ∞ strebender Zahlen, für welche $B(r) > 0$ ist. Da die Polynome $Q_{n-1}(r_m;\tau)$ nach (14) auf $|\tau| = 1$ gleichmäßig beschränkt sind, kann man eine Indexteilfolge $m_1, m_2, \ldots$ derart finden, daß an n verschiedenen Punkten $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ des Einheitskreises die Folgen $Q_{n-1}(r_{m_\lambda};\tau_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ konvergieren. Dann existieren auch die Grenzwerte

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{b_1(r_{m_\lambda})}{B(r_{m_\lambda})} = C_1, \ldots, \lim_{\lambda\to\infty}\frac{b_n(r_{m_\lambda})}{B(r_{m_\lambda})} = C_n.$$

Daraus folgt nach (13) die Existenz von

$$\lim_{\lambda\to\infty} Q_{n-1}(r_{m_\lambda};\tau) = C_1\tau^{n-1}+\cdots+C_{n-1}\tau+C_n = Q_{n-1}(\tau).$$

---

[5]) G. Faber, a. a. O., S. 87, Gl. (38).

Nach (11) ist

$$\left|\frac{b_1(r_{m_\lambda})r_{m_\lambda}^{n-1}}{B(r_{m_\lambda})}\right| + \cdots + \left|\frac{b_n(r_{m_\lambda})}{B(r_{m_\lambda})}\right| \geqq 1,$$

also auch, wie der Grenzübergang $\lambda \to \infty$ lehrt,

$$|C_1| + \cdots + |C_n| \geqq 1.$$

Mithin ist das Polynom $Q_{n-1}(\tau)$ zwar höchstens vom Grade $n-1$, aber nicht identisch gleich Null.

Indem wir zur Abkürzung $r_{m_\lambda} = \varrho_\lambda$ setzen, können wir feststellen, daß es eine Folge oberhalb r_0 gelegener und gegen ∞ strebender Zahlen $\{\varrho_\lambda\}$ derart gibt, daß gleichmäßig auf dem Einheitskreis

$$Q_{n-1}(\varrho_\lambda;\tau) - \zeta\left(\varrho_\lambda;\frac{1}{\tau}\right) \to Q_{n-1}(\tau) \quad \text{für } \lambda \to \infty, \tag{17}$$

wo das Polynom $Q_{n-1}(\tau)$ höchstens vom Grade $n-1$ ist, aber nicht identisch verschwindet.

Nach dem Hilfssatz, den wir in § 3 formulieren und beweisen (angewandt mit $\alpha = 0$ und $\varepsilon = \frac{\pi}{6}$) gibt es, welchen der unendlich vielen möglichen, zueinander mod 2π kongruenten Werte wir auch unter $\arg Q_{n-1}(\tau)$ bzw. unter $\arg \tau_0^n$ verstehen, eine ganze Zahl k und auf dem Kreis $|\tau| = 1$ einen Punkt τ_0, wo $Q_{n-1}(\tau_0) \neq 0$ und

$$2k\pi - \frac{\pi}{6} \leqq \arg Q_{n-1}(\tau_0) - \arg \tau_0^n \leqq 2k\pi + \frac{\pi}{6} \tag{18}$$

ist. Ferner ist gleichmäßig für alle Punkte des Einheitskreises

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\varrho_\lambda \tau} \mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{\varrho_\lambda \tau}\right) = 0,$$

während $\varrho_\lambda \tau_0^n$ für $\lambda \to \infty$ auf einem festen Strahl der Zahlenebene gegen ∞ strebt. Daher ist nach (2)

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\infty} \arg\{p_n(\psi(\varrho_\lambda\tau_0))\} &= \lim_{\lambda\to\infty} \arg\left\{\varrho_\lambda^n \tau_0^n + \frac{1}{\varrho_\lambda \tau_0}\mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{\varrho_\lambda\tau_0}\right)\right\} \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} \arg \varrho_\lambda^n \tau_0^n = \arg \tau_0^n.\end{aligned}$$

Schließlich ist

$$\lim_{\lambda\to\infty} \left\{Q_{n-1}(\varrho_\lambda;\tau_0) + \zeta\left(\varrho_\lambda;\frac{1}{\tau_0}\right)\right\} = Q_{n-1}(\tau_0) \neq 0,$$

also

$$\lim_{\lambda\to\infty} \arg\left\{Q_{n-1}(\varrho_\lambda;\tau_0) + \zeta\left(\varrho_\lambda;\frac{1}{\tau_0}\right)\right\} = \arg Q_{n-1}(\tau_0).$$

Wir können also λ_0 so groß wählen, daß für $\lambda \geqq \lambda_0$

$$|\arg\{p_n(\psi(\varrho_\lambda\tau_0))\} - \arg \tau_0^n| < \frac{\pi}{12} \tag{19}$$

und

$$\begin{aligned}&\left|\arg\left\{B(\varrho_\lambda)\left[Q_{n-1}(\varrho_\lambda;\tau_0) + \zeta\left(\varrho_\lambda;\frac{1}{\tau_0}\right)\right]\right\} - \arg Q_{n-1}(\tau_0)\right| \\ = &\left|\arg\left[Q_{n-1}(\varrho_\lambda;\tau_0) + \zeta\left(\varrho_\lambda;\frac{1}{\tau_0}\right)\right] - \arg Q_{n-1}(\tau_0)\right| < \frac{\pi}{12}\end{aligned} \tag{20}$$

ist. Dann wird nach (18), (19) und (20)

$$\arg p_n(\psi(\varrho_\lambda \tau_0)) - \arg\left\{B(\varrho_\lambda)\left[Q_{n-1}(\varrho_\lambda;\tau_0)+\zeta\left(\varrho_\lambda;\frac{1}{\tau_0}\right)\right]\right\} \leqq 2k\pi + \frac{\pi}{6} + 2\frac{\pi}{12} = 2k\pi + \frac{\pi}{3}. \tag{21}$$

Wir können uns nach (17) λ_0 auch noch gleich so groß gewählt denken, daß für $\lambda \geqq \lambda_0$

$$\left| Q_{n-1}(\varrho_\lambda;\tau_0)+\zeta\left(\varrho_\lambda;\frac{1}{\tau_0}\right)\right| \geqq \frac{1}{2}|Q_{n-1}(\tau_0)| = 2\beta \tag{22}$$

wird, wo also β eine positive Zahl bedeutet.

Setzen wir zur Abkürzung

$$\psi(\varrho_\lambda \tau_0) = x_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

und außerdem für den Augenblick

$$B(\varrho_\lambda)\left|Q_{n-1}(\varrho_\lambda;\tau_0)+\zeta\left(\varrho_\lambda;\frac{1}{\tau_0}\right)\right| = q, \tag{23}$$

so besagt (12), daß

$$t_n(\varrho_\lambda; x_\lambda) = p_n(x_\lambda) + q. \tag{24}$$

Es sei zunächst $p_n(x_\lambda) \neq 0$. Deuten wir die in (24) auftretenden Größen als Vektoren und damit als Seiten eines Dreiecks, so erkennen wir, daß der Vektor $t_n(\varrho_\lambda; x_\lambda)$ mindestens so lang ist wie die Strecke, die sich aus der Strecke $|p_n(x_\lambda)|$ und der senkrechten Projektion des Vektors q auf die den Vektor $p_n(x_\lambda)$ tragende Gerade zusammensetzt, d. h. daß

$$|t_n(\varrho_\lambda; x_\lambda)| \geqq |p_n(x_\lambda)| + |q| \cos\left(p_n(x_\lambda), q\right).$$

Da aber

$$\sphericalangle\left(p_n(x_\lambda), q\right) = \arg p_n(x_\lambda) - \arg q$$

nach (23) und (21) zwischen $2h\pi - \frac{\pi}{3}$ und $2h\pi + \frac{\pi}{3}$ liegt, ist sein Cosinus dem Betrage nach mindestens gleich $\frac{1}{2}$ und daher

$$|t_n(\varrho_\lambda; x_\lambda)| \geqq |p_n(x_\lambda)| + \tfrac{1}{2}|q|.$$

Diese Ungleichung gilt nun aber auch dann, wenn $p_n(x_\lambda) = 0$ ist, also ausnahmslos. Nach (23) und (22) ist also schließlich

$$|t_n(\varrho_\lambda; x_\lambda)| \geqq |p_n(x_\lambda)| + B(\varrho_\lambda)\beta. \tag{24}$$

Nach (2) ist für $|t| \geqq r_0'$, wenn r_0' irgendwie oberhalb r_0 gewählt wird,

$$\left| |p_n(\psi(t))| - |t^n| \right| \leqq \frac{1}{|t|}\left|\mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leqq \frac{M_n(r_0')}{|t|} = \frac{M}{|t|}. \tag{25}$$

Denken wir uns λ_0 auch noch so groß gewählt, daß für $\lambda \geqq \lambda_0$ die Ungleichung $\varrho_\lambda \geqq r_0'$ gilt, so ist insbesondere für $t = \varrho_\lambda \tau_0$

$$\varrho_\lambda^n - \frac{M}{\varrho_\lambda} \leqq |p_n(x_\lambda)| < \varrho_\lambda^n + \frac{M}{\varrho_\lambda}. \tag{26}$$

Aus (24) und (26) folgt, daß

$$\text{(27)} \qquad \max_{C_{\varrho_\lambda}} |t_n(\varrho_\lambda; x)| \geqq |t_n(\varrho_\lambda; x_\lambda)| \geqq \varrho_\lambda^n - \frac{M}{\varrho_\lambda} + B(\varrho_\lambda)\beta.$$

Nach der Eigenschaft c) der TSCHEBYSCHEFFschen Polynome und nach (25) ist aber andererseits

$$\text{(28)} \qquad \max_{C_{\varrho_\lambda}} |t_n(\varrho_\lambda; x)| \leqq \max_{C_{\varrho_\lambda}} |p_n(x)| \leqq \varrho_\lambda^n + \frac{M}{\varrho_\lambda}.$$

Aus (27) und (28) ergibt sich, daß

$$\text{(29)} \qquad B(\varrho_\lambda) \leqq \frac{2M}{\beta} \cdot \frac{1}{\varrho_\lambda} \quad \text{für } \lambda \geqq \lambda_0.$$

Es ist also

$$\text{(30)} \qquad \lim_{\lambda \to \infty} B(\varrho_\lambda) = 0.$$

Wir behaupten, daß sogar

$$\text{(31)} \qquad \lim_{r \to \infty} B(r) = 0$$

ist. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so gäbe es eine Folge $\{r_m\}$ von oberhalb r_0 gelegenen und gegen ∞ strebenden Zahlen, für welche

$$\text{(32)} \qquad B(r_m) \geqq S > 0$$

bliebe. Aus dieser ließe sich aber nach dem soeben durchgeführten Verfahren eine Teilfolge $\{r_{m_\lambda}\}$ oder $\{\varrho_\lambda\}$ derart aussondern, daß $B(\varrho_\lambda) \to 0$ für $\lambda \to \infty$, im Widerspruch zu (32).

Nach (31) und (11) ist auch

$$\lim_{r \to \infty} |b_\nu(r)|\, r^{n-\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

also erst recht

$$\lim_{r \to \infty} |b_\nu(r)| = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n);$$

daher nach (10)

$$\text{(33)} \qquad t_n(r; x) - p_n(x) \to 0 \quad \text{für } r \to \infty.$$

In jedem abgeschlossenen endlichen Teil der x-Ebene ist dieser Grenzübergang gleichmäßig in x.

Damit ist unsere Behauptung bewiesen. Für die Teilfolgen $\{\varrho_\lambda\}$, die wir oben benutzten, läßt sich über den Grenzübergang (33) Genaueres sagen: Es ist nach (11) und (29)

$$|b_\nu(\varrho_\lambda)| < \frac{2M}{\beta} \frac{1}{\varrho_\lambda^{n-\nu+1}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

und daher nach (10) und (25)

$$|t_n(\varrho_\lambda; x) - p_n(x)| \leqq \frac{2M^2}{\beta} \left| \frac{1}{\varrho_\lambda^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\varrho_\lambda^2} \right| + \frac{2nM}{\beta} \frac{1}{\varrho_\lambda} \leqq \frac{K}{\varrho_\lambda}$$

für $\lambda > \lambda_0$, sobald nur die Konstante $K = K(r_0')$ hinreichend groß gewählt und x in $I(C_{\varrho_\lambda})$ gehalten wird.

§ 3.

Ein Hilfssatz über Polynome.

Es ist noch der oben benutzte Hilfssatz anzuführen und zu beweisen:

Bedeutet $Q(x)$ ein beliebiges, nicht identisch verschwindendes Polynom von höchstens $(n-1)$tem Grade $(n \geqq 1)$ und α eine beliebige Zahl, so gibt es zu jedem noch so kleinen positiven ε auf dem Kreise $|x| = 1$ mindestens einen Punkt x_0, für den $Q(x_0) \neq 0$ und, welchen der unendlich vielen möglichen zueinander mod 2π *kongruenten Werte wir auch unter* arg $Q(x_0)$ *bzw.* arg x_0^n *verstehen,*

$$\alpha_0 - \varepsilon \leqq \arg Q(x_0) - \arg x_0^n \leqq \alpha_0 + \varepsilon$$

ist, wo α_0 eine geeignet gewählte, zu α mod 2π *kongruente Zahl bedeutet.*

Beweis. Falls $Q(x)$ identisch gleich einer Konstanten c ist, kann man sofort ein x_0 angeben, für das sogar

$$\arg c - \arg x_0^n = \alpha$$

ist, nämlich $x_0 = e^{i\omega}$ mit $\omega = \frac{1}{n}(\arg c - \alpha)$.

In allen anderen Fällen zerlegen wir $Q(x)$ in Linearfaktoren:

$$Q(x) = A(x-x_1) \ldots (x-x_k) \quad (1 \leqq k \leqq n-1).$$

Wir nehmen zunächst an, daß keine der Nullstellen x_k auf dem Kreis $|x| = 1$ liegt.

Wir entscheiden uns für einen der möglichen Werte von arg A, die alle mod 2π kongruent sind. Wir können ferner φ_* so wählen, daß $e^{i\varphi_*}$ von jeder der Zahlen $x_1, \ldots, x_k$ verschieden ist, im vorliegenden Fall also z. B. $\varphi_* = 0$ setzen, und jedem der Ausdrücke arg $(e^{i\varphi_*} - x_\varkappa)$ irgendeinen der möglichen Werte beilegen. An den übrigen Stellen $x = e^{i\varphi}$ können und wollen wir aber dann arg $(x - x_\varkappa)$ = arg $(e^{i\varphi} - x_\varkappa)$ so bestimmen, daß folgendes gilt: Ist $|x_\varkappa| > 1$ und durchläuft φ das Intervall $\varphi_* \leqq \varphi \leqq \varphi_* + 2\pi$, so ändert sich arg $(e^{i\varphi} - x_\varkappa)$ stetig, beginnend mit dem gewählten Wert arg $(e^{i\varphi_*} - x_\varkappa)$, und kehrt für $\varphi \to \varphi_* + 2\pi$ zum Ausgangswert arg $(e^{i\varphi_*} - x_\varkappa)$ zurück; die Gesamtänderung von arg $(e^{i\varphi} - x_\varkappa)$ ist also in diesem Falle gleich Null. Ist $|x_\varkappa| < 1$ und durchläuft φ das Intervall $\varphi_* \leqq \varphi \leqq \varphi_* + 2\pi$, so wächst arg $(e^{i\varphi} - x_\varkappa)$ stetig vom gewählten Wert arg $(e^{i\varphi_*} - x_\varkappa)$ an bis zum Wert arg $(e^{i\varphi_*} - x_\varkappa) + 2\pi$; in diesem Falle erfährt also arg $(e^{i\varphi} - x_\varkappa)$ eine Vermehrung um 2π.

Setzen wir nun

$$\arg Q(e^{i\varphi}) = \arg A + \arg(e^{i\varphi} - x_1) + \cdots + \arg(e^{i\varphi} - x_k), \tag{34}$$

so ist also die Änderung von arg $Q(e^{i\varphi})$, wenn φ das Intervall

$\varphi_* \leqq \varphi \leqq \varphi_* + 2\pi$ durchläuft, eine Vergrößerung um höchstens $2k\pi$, also um höchstens $2(n-1)\pi$. Tragen wir

$$y = \arg Q(e^{i\varphi}) = f(\varphi)$$

in einem rechtwinkligen (φ, y)-Koordinatensystem auf, so erhalten wir eine stetige Kurve mit der Anfangskoordinate $\Phi_0 = f(\varphi_*)$ und einer Endkoordinate

$$\Phi_1 = f(\varphi_* + 2\pi) \leqq \Phi_0 + 2(n-1)\pi.$$

Zwischen $\Phi_1 - 2n\pi \leqq \Phi_0 - 2\pi$ (einschließlich) und Φ_0 (ausschließlich) liegt mindestens eine zu $\alpha \bmod 2\pi$ kongruente Zahl $\alpha_0' = \alpha + 2h'\pi$. Wir betrachten die Gerade

$$y = \alpha_0' + n(\varphi - \varphi_*) = g(\varphi).$$

Da

$$g(\varphi_*) = \alpha_0' < \Phi_0 = f(\varphi_*); \quad g(\varphi_* + 2\pi) = \alpha_0' + 2n\pi \geqq \Phi_1 = f(\varphi^* + 2\pi)$$

ist, gibt es im Intervall $\varphi_* < \varphi \leqq \varphi_* + 2\pi$ mindestens eine Stelle φ_0, wo $f(\varphi_0) = g(\varphi_0)$, d. h.

$$\arg Q(e^{i\varphi_0}) = \alpha_0' + n(\varphi_0 - \varphi_*) = \alpha_0' + \arg (e^{i\varphi_0})^n - n\varphi_*, \tag{35}$$

wenn $\arg (e^{i\varphi_0})^n$ geeignet gewählt wird. Setzen wir $e^{i\varphi_0} = x_0$ und insbesondere $\varphi_* = 0$, so ist also $Q(x_0) \neq 0$ und bei der in (34) und (35) getroffenen Bestimmung der auftretenden Argumente

$$\arg Q(x_0) - \arg x_0^n = \alpha_0' = \alpha + 2h'\pi.$$

Nehmen wir die Bestimmung der Argumente irgendwie anders vor, so ändert sich die linke Seite nur um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π, und es wird bei geeigneter Wahl der ganzen Zahl h

$$\arg Q(x_0) - \arg x_0^n = \alpha + 2h\pi = \alpha_0.$$

In diesem Fall ist also unsere Behauptung sogar mit $\varepsilon = 0$ richtig.

Nun ist noch der Fall zu betrachten, daß einige Nullstellen von $Q(x)$ den Betrag 1 haben; es seien dies die Nullstellen $x_1, \ldots, x_l$, wo $1 \leqq l \leqq k \leqq n-1$. Dann können wir φ_* ebenfalls so wählen, daß $e^{i\varphi_*}$ mit keiner Nullstelle von $Q(x)$ zusammenfällt, es aber außerdem so einrichten, daß $|\varphi_*| < \frac{\varepsilon}{2n}$ ist. Das Argument von A und die Argumente $\arg (e^{i\varphi} - x_\varkappa)$ bestimmen wir, falls $|x_\varkappa| \geqq 1$ ist, wie vorhin. Die Nullstellen $x_\lambda = e^{i\varphi_\lambda}$ können wir uns so numeriert und die φ_λ so gewählt denken, daß

$$\varphi_* < \varphi_1 \leqq \varphi_2 \leqq \cdots \leqq \varphi_l < \varphi_* + 2\pi.$$

Jedem der Ausdrücke $\arg (e^{i\varphi_*} - e^{i\varphi_\lambda})$ legen wir irgendeinen seiner möglichen Werte bei und setzen $\arg (e^{i(\varphi_* + 2\pi)} - e^{i\varphi_\lambda}) = \arg (e^{i\varphi_*} - e^{i\varphi_\lambda}) + 2\pi$. Im Intervall $\varphi_* \leqq \varphi < \varphi_\lambda$ können und wollen wir dann $\arg (e^{i\varphi} - e^{i\varphi_\lambda})$ so bestimmen, daß $\arg (e^{i\varphi} - e^{i\varphi_\lambda})$ stetig vom Ausgangswert $\arg (e^{i\varphi_*} - e^{i\varphi_\lambda})$ anwächst und für $\varphi \to \varphi_\lambda$ gegen einen bestimmten

Grenzwert strebt. Im Intervall $\varphi_* + 2\pi \geqq \varphi > \varphi_\lambda$ können und wollen wir $\arg(e^{i\varphi} - e^{i\varphi_\lambda})$ so bestimmen, daß $\arg(e^{i\varphi} - e^{i\varphi_\lambda})$ stetig vom Wert $\arg(e^{i(\varphi_* + 2\pi)} - e^{i\varphi_\lambda})$ aus abnimmt und für $\varphi \to \varphi_\lambda$ gegen einen bestimmten Grenzwert strebt; dieser Grenzwert ist dann um π größer als derjenige, der für wachsend gegen φ_λ strebendes φ herauskam; $\arg(e^{i\varphi} - e^{i\varphi_\lambda})$ erfährt also eine sprunghafte Vermehrung um π, wenn φ durch den Wert φ_λ hindurchgeht, und sonst im Intervall $\varphi_* \leqq \varphi \leqq \varphi_* + 2\pi$ eine stetige Vermehrung um π, also insgesamt in diesem Intervall eine Vermehrung um 2π.

Setzen wir wiederum

$$\arg Q(e^{i\varphi}) = \arg A + \arg(e^{i\varphi} - x_1) + \cdots + \arg(e^{i\varphi} - x_k) = f(\varphi),$$

so ist, von den Stellen φ_λ abgesehen, $f(\varphi)$ im Intervall $\varphi_* \leqq \varphi \leqq \varphi_* + 2\pi$ stetig; an den Stellen φ_λ ist $f(\varphi)$ sprunghaft unstetig und erfährt an einer Sprungstelle ψ_μ ($\mu = 1, \ldots, m$; $1 \leqq m \leqq l$) eine sprunghafte Vermehrung um soviele Vielfache von π, als es unter den Zahlen $\varphi_1, \ldots, \varphi_2$ gleiche gibt, die den Wert ψ_μ haben, d. h. um soviele Vielfache von π, als der Vielfachheit der betreffenden Nullstelle von $Q(x)$ entspricht. Indem wir dem Bild der Funktion $y = f(\varphi)$ die Sprungstrecken $\mathfrak{S}_\mu$ einfügen, bekommen wir eine stetige Kurve $\mathfrak{L}$, die die Punkte (φ_*, Φ_0) und $(\varphi_* + 2\pi, \Phi_1)$ verbindet. Führen wir die Zahl α_0' wie im vorigen Falle ein, so haben die Gerade

$$y = \alpha_0' + n(\varphi - \varphi_*) = g(\varphi)$$

und die Kurve $\mathfrak{L}$ mindestens einen Punkt gemeinsam.

Wir setzen noch $\psi_0 = \varphi_*$ und $\psi_{m+1} = \varphi_* + 2\pi$ und betrachten für $\mu = 0, 1, \ldots, m$ die abgeschlossenen stetigen Kurvenbögen

$$\mathfrak{B}_\mu: \; y = \begin{cases} f(\psi_\mu + 0) & \text{für } \varphi = \psi_\mu, \\ f(\varphi) & \text{für } \psi_\mu < \varphi < \psi_{\mu+1}, \\ f(\psi_{\mu+1} - 0) & \text{für } \varphi = \psi_{\mu+1}. \end{cases}$$

Auch mit mindestens einem dieser Bögen hat die Gerade $y = g(\varphi)$ einen Punkt gemeinsam. Denn trifft sie $\mathfrak{B}_0$ nicht, so trifft sie auch nicht die $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}_1$ verbindende Sprungstrecke $\mathfrak{S}_1$, weil dann $\mathfrak{B}_0$ und damit auch $\mathfrak{S}_1$ im Intervall $\psi_0 \leqq \varphi \leqq \varphi_1$ ganz oberhalb der Geraden liegen; trifft sie $\mathfrak{B}_1$ nicht, so trifft sie auch nicht die $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ verbindende Sprungstrecke $\mathfrak{S}_2$ usw. Hat also die Gerade keinen der Bögen $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_{m-1}$ getroffen, so muß sie den Bogen $\mathfrak{B}_m$ treffen, da sie sonst auch mit

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{S}_2 + \cdots + \mathfrak{B}_{m-1} + \mathfrak{S}_m + \mathfrak{B}_m$$

keinen Schnittpunkt gemeinsam hätte, entgegen der obigen Feststellung.

Einen der Schnittpunkte der Geraden $y = g(\varphi)$ mit der Punktmenge $\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1 + \cdots + \mathfrak{B}_m$ greifen wir heraus und bezeichnen seine

Abszisse mit φ_0. Gibt es eine Nummer μ_0 derart, daß $\psi_{\mu_0} < \varphi_0 < \psi_{\mu_0+1}$, so ist, wenn $x_0 = e^{i\varphi_0}$ gesetzt wird, $Q(x_0) \neq 0$ und

$$\begin{aligned}\arg Q(x_0) = \arg Q(e^{i\varphi_0}) = f(\varphi_0) &= \alpha_0' + n(\varphi_0 - \varphi_*) \\ &= \alpha_0' + \arg (e^{i\varphi_0})^n - n\psi_*,\end{aligned}$$

wenn $\arg (e^{i\varphi_0})^n$ geeignet gewählt wird, also bei der Beschränkung, die wir φ_* auferlegten,

$$\alpha_0' - \varepsilon < \arg Q(x_0) - \arg x_0^n < \alpha_0 + \varepsilon.$$

Nehmen wir aber die Bestimmung der Argumente irgendwie anders vor, so ändert sich das mittlere Glied dieser Ungleichung nur um ein Vielfaches von 2π; es gilt also wiederum eine Ungleichung

$$\alpha_0 - \varepsilon < \arg Q(x_0) - \arg x_0^n < \alpha_0' + \varepsilon.$$

wo auch α_0 eine zu $\alpha \bmod 2\pi$ kongruente Zahl ist.

Ist aber $\varphi_0 = \psi_{\mu_0}$, wo μ_0 eine der Zahlen $1, 2, \ldots, m$ bedeutet, so ist entweder $g(\varphi_0) = f(\psi_{\mu_0} - 0)$ oder $g(\psi_0) = f(\psi_{\mu_0} + 0)$ und $Q(e^{i\varphi_0}) = 0$. Dann können wir aber φ_0' so nahe bei φ_0 wählen, daß zwar $Q(x_0) = Q(e^{i\varphi_0'}) \neq 0$ ist, aber trotzdem

$$-\frac{\varepsilon}{2} \leqq f(\varphi_0') - g(\varphi_0') \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

bleibt, d. h. bei geeigneter Bestimmung von $\arg (x_0^n) = \arg e^{i\varphi_0'}$ auch

$$-\frac{\varepsilon}{2} \leqq \arg Q(x_0) - \arg x_0^n - \alpha_0' + n\varphi_* \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

und damit

$$\alpha_0' - \varepsilon \leqq \arg Q(x_0) - \arg x_0^n \leqq \alpha_0' + \varepsilon$$

wird. Aus dieser Feststellung folgt wiederum, daß auch bei jeder von der hier vorgenommenen abweichenden Bestimmung der Argumente eine Ungleichung der Form

$$\alpha_0 - \varepsilon \leqq \arg Q(x_0) - \arg x_0^n \leqq \alpha_0 + \varepsilon$$

gilt, wenn α_0 in geeigneter Weise zu $\alpha \bmod 2\pi$ kongruent gewählt ist.

Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 22. November 1943.)

Eindeutige beschränkte Funktionen in mehrfach zusammenhängenden Gebieten.

III. Ein Einzigkeitssatz.

Von

H. Grunsky in Trossingen (Württ.)

Einleitung.

1. Im folgenden handelt es sich um den Beweis für die Einzigkeit der Lösung eines gewissen Extremalproblems [1]). Dem in Teil I dieser Arbeit [2]) formulierten Satz I liegt eine Klasse von Funktionen zugrunde, die in einem mehrfach zusammenhängenden Gebiet regulär, eindeutig und gleichmäßig beschränkt sind und in einem festen inneren Punkt verschwinden. Behauptet wurde unter anderem, daß es unter diesen Funktionen im wesentlichen nur eine einzige gibt, die in einem zweiten vorgegebenen innern Punkt möglichst großen Betrag annimmt. Der übrige Inhalt von Satz I ist ein Spezialfall des in Teil II [2]) bewiesenen Satzes IV, der aber keine Einzigkeitsaussage enthält. Der Beweis dieses Teiles von Satz I steht also noch aus und wird uns hier beschäftigen. Doch kann ich ihn auch jetzt noch nicht allgemein geben, muß mich vielmehr auf den Fall eines dreifach zusammenhängenden Gebietes beschränken. Die Untersuchung der Einzigkeitsfrage für den entsprechenden Spezialfall des allgemeineren Extremalproblems von Satz IV stelle ich, obgleich sie mit denselben Mitteln durchzuführen wäre, zurück, damit nicht der an sich einfache Gedankengang in einem übergroßen Vielerlei von Fallunterscheidungen zu sehr an Deutlichkeit verliere. Ich werde also beweisen:

Satz I a′: *$\mathfrak{B}$ sei ein dreifach zusammenhängendes schlichtes Gebiet ohne punktförmige Randkomponente, z_0 und z^* seien zwei verschiedene innere Punkte desselben. $\mathfrak{K}_I$ sei die Klasse der in $\mathfrak{B}$ regulären, eindeutigen Funktionen $F(z)$ mit $|F(z)|<1$, $F(z_0)=0$. Dann gibt es in $\mathfrak{K}_I$, abgesehen von einem willkürlichen konstanten Faktor vom Betrage* 1, *genau eine Funktion $F_I(z)$, für die $|F(z^*)|$ ein absolutes Maximum innerhalb von $\mathfrak{K}_I$ erreicht.*

---

[1]) Über den Inhalt dieser Arbeit habe ich auf der Tagung der DMV in Jena im Oktober 1941 vorgetragen; vgl. den Bericht in J.-Ber. Deutsche Math.-Vereinig. **52** (1942), 2. Abt., S. 33.

[2]) Teil I und II: J.-Ber. Deutsche Math.-Vereinig. **50** (1940), 230—255; **52** (1942), 118—132.

2. Aus dem schon bewiesenen Teil von Satz I wissen wir, daß jede Funktion $w = F(z)$ mit der Extremaleigenschaft das Gebiet $\mathfrak{B}$ auf ein Riemannsches Flächenstück abbildet, das $|w| < 1$ überall dreimal bedeckt; dabei geht jede der drei Randkomponenten in den einmal durchlaufenen Rand des Einheitskreises über. Damit ist eine Teilklasse $\mathfrak{K}_I'$ aus $\mathfrak{K}_I$ ausgesondert, in der die Extremalfunktionen zu suchen sind. Es wird sich zeigen, daß die Elemente von $\mathfrak{K}_I'$ im allgemeinen eine geschlossene zweidimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ bilden (auf der, von gewissen Ausnahmen abgesehen, jede Funktion von $\mathfrak{K}_I'$ zweimal auftritt). $|F(z^*)|$ ist nun eine Funktion auf $\mathfrak{M}$, und es wird nach der Anzahl der Stellen gefragt, in denen sie ihr absolutes Maximum erreicht. Die Antwort stützt sich auf zwei Überlegungen: erstens ziehen wir die Kroneckersche Formel heran, die die Anzahl der (relativen) Maxima, Minima und Sattelwerte mit dem Geschlecht von $\mathfrak{M}$ verknüpft. Zweitens bestimmen wir die Gesamtzahl der stationären Stellen, und zwar mittels der Euler-Lagrangeschen Multiplikatorenregel. Aus diesen beiden Beziehungen lassen sich die drei Anzahlen ermitteln, wenn man noch die selbstverständlichen Mindestanzahlen der Maxima und Minima berücksichtigt. Es wird sich dabei ergeben, daß es innerhalb von $\mathfrak{K}_I'$ im wesentlichen sogar nur ein relatives Maximum gibt.

Durchführung des Beweises.

1. Die eingeengte Funktionsklasse als zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir voraussetzen, die drei Komponenten C_0, C_1, C_2, des Randes C von $\mathfrak{B}$ seien geschlossene analytische Kurven und $\mathfrak{B}$ sei beschränkt; durch C_0 werde $\mathfrak{B}$ vom Punkte ∞ getrennt.

1. 1. Jede Funktion $F(z)$ aus $\mathfrak{K}_I'$ hat außer der vorgeschriebenen Nullstelle z_0 noch zwei zusätzliche, z_1 und z_2, und sie ist durch diese bis auf einen konstanten Faktor vom Betrage 1 völlig bestimmt. Aber damit ein Paar $\mathfrak{z} = (z_1, z_2)$ von Punkten aus $\mathfrak{B}$ als Paar zusätzlicher Nullstellen einer Funktion aus $\mathfrak{K}_I'$ brauchbar sei, muß es gewissen Bedingungen genügen. Setzen wir für $F(z) \in \mathfrak{K}_I'$:

$$\log F(z) = T(z) = t(z) + i\, t^*(z),$$

so ist $t(z)$ eine in $\mathfrak{B}$ überall reguläre harmonische Funktion, abgesehen von den Punkten z_ι $(\iota = 0, 1, 2)$, wo sie sich wie $\log|z - z_\iota|$ verhält, welche auf dem Rande verschwindet. Diese Eigenschaften sind kennzeichnend für $t(z)$; sie kommen aber der Funktion $-\sum_{\iota=0}^{2} g(z; z_\iota)$ zu, wenn $g(z; \zeta)$ die Greensche Funktion von $\mathfrak{B}$ mit der Singularität ζ bezeichnet; also ist

$$t(z) = -\sum_{\iota=0}^{2} g(z; z_\iota).$$

Ein solches $t(z)$ kann zwar zu jedem Paar $\mathfrak{z} = (z_1, z_2)$ gebildet werden, aber dafür, daß zu ihm ein $F(z)$ aus $\mathfrak{R}_I$ gehört, ist notwendig und hinreichend, daß die konjugierte Funktion $t^*(z)$ mod 2π eindeutig in $\mathfrak{B}$ ausfällt, und aus dieser Forderung ergeben sich Einschränkungen für die Wahl von z_1 und z_2. $t^*(z)$ erfüllt nämlich dann und nur dann besagte Forderung, wenn es sich bei einfachen Umläufen um C_1 und C_2 nur um ganzzahlige Vielfache von 2π ändert, d. h. wenn die zugehörigen Perioden

$$\tau_\iota = \int_{C_\iota} d\,t^*(z) \equiv 0 \pmod{2\pi} \qquad (\iota = 1.2)$$

sind. Hier dürfen wir an Stelle von $\equiv 0 \bmod 2\pi$ schreiben: $= 2\pi$, denn τ_ι ist ja die Änderung von arc w in $w = F(z)$, wenn z die Randkomponente C_ι, w also einmal den Einheitskreis durchläuft. Es ist aber, wenn s die Bogenlänge auf C, n die in das Innere von $\mathfrak{B}$ weisende Normale bezeichnet:

$$\tau_\iota = \int_{C_\iota} d\,t^*(z) = \int_{C_\iota} \frac{\partial\, t^*(z)}{\partial s}\, ds = -\int_{C_\iota} \frac{\partial\, t(z)}{\partial n}\, ds$$

$$= \sum_{\iota'=0}^{2} \int_{C_\iota} \frac{\partial\, g(z; z_{\iota'})}{\partial_z n}\, ds = \sum_{\iota'=0}^{2} \gamma_\iota(z_{\iota'}).$$

Hier ist $\gamma_\iota(z)$ diejenige in $\mathfrak{B}$ überall reguläre harmonische Funktion, die auf C_ι die Randwerte 2π, auf den beiden andern Randkomponenten die Randwerte 0 annimmt, also das 2π-fache des harmonischen Maßes von C_ι. Die Bedingungen, denen die Wahl des Paares $\mathfrak{z} = (z_1, z_2)$ der zusätzlichen Nullstellen unterworfen ist — wir nennen sie im folgenden kurz die Periodenbedingungen — können wir also, indem wir γ_1 und γ_2 zu einem Vektor γ zusammenfassen und $(2\pi, 2\pi) = \alpha$ setzen, so schreiben:

$$\gamma(z_0) + \gamma(z_1) + \gamma(z_2) = \alpha \tag{1.1}$$

oder:

$$\gamma(z_1) = (\alpha - \gamma(z_0)) - \gamma(z_2). \tag{1.2}$$

Wir deuten die hier auftretenden Vektoren als Ortsvektoren τ in einer Ebene — wir nennen sie die Periodenebene —, und lassen z_1 und z_2 unabhängig voneinander in $\mathfrak{B}$ variieren. Dann werden durch die in (1. 2) links bzw. rechts stehenden Vektorfunktionen

$$\tau = \gamma(z_1) \tag{1.3}$$

$$\tau = \gamma_{z_0}(z_2) = (\alpha - \gamma(z_0)) - \gamma(z_2) \tag{1.4}$$

zwei Abbildungen von $\mathfrak{B}$ in die Periodenebene vermittelt (von denen die zweite noch von z_0 als Parameter abhängt), und ein Paar $\mathfrak{z} = (z_1, z_2)$ ist dann und nur dann ein brauchbares, d. h. ein solches, das auf

eine Funktion $F(z)$ aus $\mathfrak{R}_I'$ führt, wenn die Bilder von z_1 und z_2 vermöge dieser beiden Abbildungen zusammenfallen. Nennen wir $\Delta^{(1)}$ bzw. $\Delta^{(2)}$ die Bildmengen von $\mathfrak{B}$ bei den beiden Abbildungen (1. 3) und (1. 4), Δ ihren Durchschnitt, so sind also die brauchbaren Paare die Paare von Urbildern der Punkte von Δ bei diesen beiden Abbildungen. Um einen Überblick über sie zu gewinnen, haben wir also die Abbildung

$$\tau = \gamma(z), \tag{1. 5}$$

mit der ja auch (1. 4) in der einfachsten Weise zusammenhängt, sowie ihre Umkehrung zu untersuchen.

1. 2. Die Abbildung (1. 5) ist im kleinen umkehrbar eindeutig für alle die Stellen $z = x + iy$, für die die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \gamma_{1x} & \gamma_{1y} \\ \gamma_{2x} & \gamma_{2y} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1. 6}$$

ist. Ihr Verschwinden für ein gewisses $z = \zeta$ ist gleichbedeutend damit, daß es eine Linearkombination von γ_1 und γ_2 mit reellen nicht zugleich verschwindenden Koeffizienten gibt:

$$\gamma_\lambda(z) = \lambda_1 \gamma_1(z) + \lambda_2 \gamma_2(z),$$

für die $\gamma_{\lambda x}(\zeta) = \gamma_{\lambda y}(\zeta) = 0$ ist. Durch die zugehörigen analytischen Funktionen[3]) Γ_λ, Γ_1, Γ_2 ausgedrückt, bedeutet das:

$$\Gamma_\lambda'(\zeta) = \lambda_1 \Gamma_1'(\zeta) + \lambda_2 \Gamma_2'(\zeta) = 0.$$

Nur wenn diese Gleichung eine reelle Lösung besitzt, d. h., wenn

$$\Psi(z) = \frac{\Gamma_2'(z)}{\Gamma_1'(z)}$$

für $z = \zeta$ reell ist, kann es sein, daß (1. 5) in der Umgebung von $z = \zeta$ nicht eindeutig umkehrbar ist.

Um die Stellen z mit reellem $\Psi(z)$ überblicken zu können, untersuchen wir die durch $w = \Psi(z)$ vermittelte konforme Abbildung. Auf C ist $\Psi(z) = \frac{d\,\Gamma_2}{d\,\Gamma_1}$, und hier sind Zähler und Nenner rein imaginär, $\Psi(z)$ also reell. Ferner haben Γ_1' und Γ_2' nach einem Hilfssatz aus Teil I[4]) je genau eine Nullstelle im Innern von $\mathfrak{B}$ oder zwei auf

[3]) Durchweg bezeichnen wir eine harmonische Funktion mit einem kleinen, eine analytische Funktion, deren Realteil jene ist, mit dem entsprechenden großen Buchstaben. Die Unbestimmtheit ihres Imaginärteils um eine additive Konstante kann nirgends zu Mißverständnissen Anlaß geben.

[4]) Dieser *Hilfssatz* lautet: $\mathfrak{B}$ sei ein $(n+1)$-fach zusammenhängendes Gebiet, dessen Randkomponenten als analytische Kurven angenommen seien, $\mathfrak{G}(z)$ eine überall in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion, ausgenommen Q Stellen, in denen sie logarithmische Singularitäten besitze; ihre Ableitung sei eindeutig, ihr Realteil auf jeder Randkomponente konstant. Dann liegen auf jeder Randkomponente eine gerade Anzahl von Nullstellen von $\mathfrak{G}'(z)$, und wenn deren N in $\mathfrak{B}$, $2\mathsf{N}$ auf dem Rande liegen, so ist $N + \mathsf{N} - Q = n - 1$.

dem Rande. Die zweite Möglichkeit scheidet aus, denn $\Gamma_i'(z) = 0$ in einem Randpunkt würde im Widerspruch stehen dazu, daß das durch $\omega = \Gamma_i(z)$ entworfene Bild von $\mathfrak{B}$ jeweils ganz zwischen den beiden Geraden $\Re e\,\omega = 0$ und $\Re e\,\omega = 2\pi$ liegt, auf die das Bild des Randes fällt. Die Nullstellen von Γ_1' und Γ_2' sind voneinander verschieden, da sonst Ψ regulär und nullstellenfrei und also mit Rücksicht auf sein Randverhalten konstant, sagen wir gleich a, wäre; dann wäre $\Gamma_2' - a\Gamma_1' = 0$, $\Gamma_2 - a\Gamma_1 = \text{const}$, und das ist nicht möglich, da diese Funktion auf verschiedenen Randkomponenten verschiedene Werte hat.

Also ist $\Psi(z)$ eine in $\mathfrak{B}$ eindeutige, bis auf einen Pol und eine Nullstelle reguläre und nullstellenfreie Funktion, die auf dem Rande reelle Werte annimmt. Sie bildet also $\mathfrak{B}$ auf ein schlichtes Schlitzgebiet ab, dessen Schlitze auf der reellen Achse im Endlichen liegen.

Die eindeutige Umkehrbarkeit im kleinen der Abbildung (1. 5) besteht also überall in $\mathfrak{B}$, ausgenommen allenfalls in den Punkten, die durch $w = \Psi(z)$ auf die reelle Achse abgebildet werden. Für den Bildbereich bei dieser Abbildung ist die reelle Achse Symmetrielinie; ihr Urbild in $\mathfrak{B}$ sei $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{01} + \mathfrak{S}_{12} + \mathfrak{S}_{20}$, wobei $\mathfrak{S}_{i\varkappa}$ die beiden Randkomponenten C_i und $C_\varkappa$ miteinander verbindet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, $\mathfrak{S}$ liege selbst auf der reellen Achse und $\mathfrak{B}$ sei zu ihr symmetrisch.

In jeder der beiden Hälften, in die $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{S}$ zerlegt wird, ist die Abbildung (1. 5) im kleinen eindeutig umkehrbar; Punkte, die in bezug auf $\mathfrak{S}$ spiegelbildlich liegen, haben denselben Bildpunkt. Wir können auf eindeutige Umkehrbarkeit im großen in jeder der beiden Hälften schließen, wenn wir zeigen können, daß deren Ränder in einfach geschlossene Kurven übergehen. Nun bestehen diese Ränder aus je einer Hälfte der Komponenten von C und aus den drei Abschnitten von $\mathfrak{S}$. Auf jeder Randkomponente ist $\gamma(z)$ konstant, nämlich gleich $\alpha_0^{(1)} = (0, 0)$ auf C_0, gleich $\alpha_1^{(1)} = (2\pi, 0)$ auf C_1, gleich $\alpha_2^{(1)} = (0, 2\pi)$ auf C_2, und im Innern von $\mathfrak{B}$ gilt:

$$0 < \gamma_1(z) < 2\pi; \quad 0 < \gamma_2(z) < 2\pi; \quad 0 < \gamma_1(z) + \gamma_2(z) = 2\pi - \gamma_0(z) < 2\pi.$$

Das Bild $\Delta^{(1)}$ von $\mathfrak{B}$ liegt also ganz im Innern des geradlinig berandeten Dreiecks $\Delta^{(1)}$ mit den Ecken $\alpha_0^{(1)}$, $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_2^{(1)}$. Jeder der Abschnitte $\mathfrak{S}_{i\varkappa}$ geht in einen stetig differenzierbaren Bogen $\sum_{i\varkappa}^{(1)}$ über, der $\alpha_i^{(1)}$ mit $\alpha_\varkappa^{(1)}$ durch das Innere von $\Delta^{(1)}$ hindurch verbindet.

Wir zeigen, daß die $\sum_{i\varkappa}^{(1)}$ zusammen eine einfach geschlossene Kurve bilden, d. h. daß die Abbildung auf $\mathfrak{S}$ eindeutig umkehrbar ist. Gäbe es nämlich auf $\mathfrak{S}$ zwei Punkte mit dem gleichen Bildpunkt, so läge dieser auf einer geschlossenen Kurve, die ganz aus Bogen der $\sum_{i\varkappa}^{(1)}$ bestünde und außer jenem Punkt höchstens noch einen weiteren, nämlich ein $\alpha_i^{(1)}$, mit unstetiger Tangentenrichtung besäße. In mindestens

einem Paar von Punkten dieser Kurve hätte man dieselbe Tangentenrichtung. Diese ist aber gegeben durch

$$\frac{\gamma_{2x}}{\gamma_{1x}} = \frac{\Re e\, \Gamma_2'}{\Re e\, \Gamma_1'}$$

Da nun auf $\mathfrak{S}$ wegen der Symmetrie $\Im m\, \Gamma_2' = -\gamma_{2y} = \Im m\, \Gamma_1' = -\gamma_{1y} = 0$ gilt, so ist dort

$$\frac{\gamma_{2x}}{\gamma_{1x}} = \frac{\Gamma_2'}{\Gamma_1'} = \Psi',$$

und die zu widerlegende Annahme widerspricht der Schlichtheit von $\Psi(z)$. — Ebenso ergibt sich, daß sich die Tangente an jeden der Bogen $\sum_{ix}^{(i)}$ beim Durchlaufen desselben in einerlei Sinn dreht.

Die Bildmenge $\Delta^{(1)}$ bei der Abbildung (1. 5) ist also ein gewisses krummlinig berandetes abgeschlossenes Dreieck, die Ecken $\alpha_0^{(1)}$, $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_2^{(1)}$ ausgenommen, die bzw. den Randkomponenten C_0, C_1, C_2 entsprechen; seine Seiten verlaufen je mit Krümmung einerlei Vorzeichens ganz im Innern des geradlinig berandeten Dreiecks mit denselben Ecken (Fig. 1). Jeder innere Punkt von $\Delta^{(1)}$ hat in $\mathfrak{B}$ zwei in bezug auf $\mathfrak{S}$ symmetrisch liegende Urbilder, jeder Randpunkt, die Ecken ausgenommen, ein Urbild auf $\mathfrak{S}$.

1. 3. Nunmehr können wir die am Schluß von **1. 1.** angedeutete Erörterung der Auswahl der brauchbaren Paare, wie sie durch (1. 2) getroffen wird, durchführen (vgl. dazu Fig. 1 und 2). Alles zu $\Delta^{(2)}$ Gehörige werde durch den oberen Index 2, im übrigen gleich wie die entsprechenden Stücke von $\Delta^{(1)}$ bezeichnet. $\Delta^{(2)}$ geht aus $\Delta^{(1)}$ durch eine Drehung um den Punkt $\alpha_0^{(1)}$ um π und nachfolgende Parallelverschiebung um $\alpha_0^{(2)} = \alpha - \gamma(z_0)$ hervor. Für die Ecke $\alpha_0^{(2)}$ ist, je nach Lage von z_0, jeder Punkt im Innern eines zu $\Delta^{(1)}$ kongruenten Dreiecks $\Delta^{(0)}$ möglich, dessen Ecken $\alpha_0^{(0)} = \alpha$, $\alpha_1^{(0)} = \alpha_2^{(1)}$, $\alpha_2^{(0)} = \alpha_1^{(1)}$ sind. $\Delta^{(1)}$ und $\Delta^{(2)}$ vertauschen die Plätze durch Drehung um den Winkel π um das Symmetriezentrum $\sigma = \frac{1}{2}\alpha_0^{(2)}$.

Um ein Bild von Δ zu bekommen, macht man sich nun leicht die folgenden einfachen Tatsachen klar: $\sum_{ix}^{(1)}$ schneidet $\sum_{i'x'}^{(2)}$ bei $(i, x) \neq (i', x')$ einmal; bei $(i, x) = (i', x')$ sind beide Bogen entweder punktfremd, oder sie berühren sich oder sie schneiden sich in zwei Punkten, und zwar hat höchstens e i n Paar $\sum_{ix}^{(1)}$, $\sum_{ix}^{(2)}$ gemeinsame Punkte. Denn wenn das z. B. für $\sum_{12}^{(1)}$ und $\sum_{12}^{(2)}$ der Fall ist, so liegen die Schnittpunkte in dem Parallelstreifen zwischen ihren Tangenten in $\alpha_1^{(1)}$ und $\alpha_1^{(2)}$, und dieser trennt $\sum_{01}^{(1)}$ und $\sum_{01}^{(2)}$ voneinander.

Wir unterscheiden nun drei Fälle:

{1; 1}. Die drei Paare entsprechender Bogen $\sum_{ix}^{(1)}$, $\sum_{ix}^{(2)}$ sind punktfremd. Dann ist Δ ein zusammenhängender Bereich und das Symmetriezentrum σ gehört seinem Innern an (Fig. 1).

{1; 2}. Fin Paar $\sum_{i\varkappa}^{(1)}$, $\sum_{i\varkappa}^{(2)}$ schneidet sich in zwei Punkten. Dann besteht Δ aus zwei punktfremden Bereichen und σ liegt außerhalb von Δ (Fig. 2; dort ist $(\iota, \varkappa) = (1, 2)$).

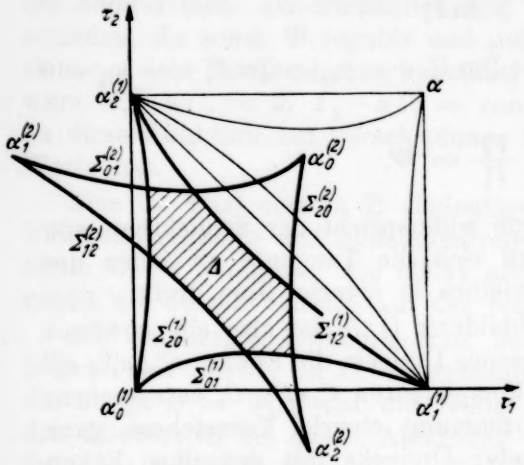

Fig. 1.

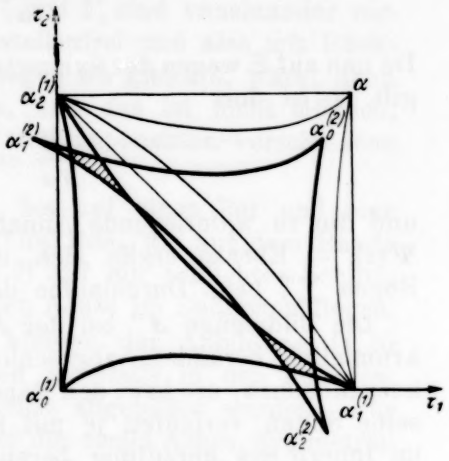

Fig. 2.

Der dritte Fall ist der Grenzfall zu diesen beiden:

{1; 1, 2}. Eines der genannten Paare berührt sich in einem Punkt; Δ besteht aus zwei Bereichen mit einem gemeinsamen Randpunkt, und dieser ist das Symmetriezentrum σ.

Dem Δ entspricht nun in jeder der beiden Hälften von $\mathfrak{B}$ als Urbild bei der Abbildung (1. 3) umkehrbar eindeutig ein Teilbereich, und diese beiden zusammen machen die Menge $\mathfrak{M}'$ der für z_1 und — wegen der Gleichberechtigung von z_1 und z_2 — für z_2 in den brauchbaren Paaren möglichen Punkte aus. Die Gestalt von $\mathfrak{M}'$ macht man sich leicht klar, indem man überlegt, daß z. B. dem Teilbogen von $\sum_{01}^{(2)}$, der zum Rande von Δ gehört, als Urbild bei der Abbildung (1. 3) in beiden Hälften von $\mathfrak{B}$ ein ganz im Innern verlaufender, $\mathfrak{S}_{12}$ und $\mathfrak{S}_{20}$ verbindender Bogen entspricht; beide zusammen bilden eine einfach geschlossene, C_2 umschließende Kurve C_2'. Auf diese Weise findet man, entsprechend der vorigen Fallunterscheidung:

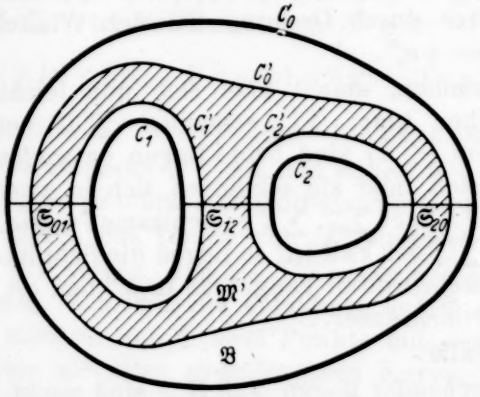

Fig. 3.

{1; 1}. $\mathfrak{M}'$ ist ein dreifach zusammenhängender Bereich; seine Randkomponenten C_0', C_1', C_2' sind denen von $\mathfrak{B}$ in dem Sinne zugeordnet, daß C_i durch C_i' von $\mathfrak{M}'$ getrennt wird (Fig. 3).

$\{\mathbf{1}; 2\}$. $\mathfrak{M}'$ zerfällt in zwei punktfremde Ringbereiche. Jeder derselben trennt eine Randkomponente von $\mathfrak{B}$ von den beiden andern.

$\{\mathbf{1}; 1, 2\}$. $\mathfrak{M}'$ besteht aus zwei Ringbereichen, die einen auf $\mathfrak{S}$ liegenden Randpunkt gemeinsam haben.

Zu jedem z_1 im Innern von $\mathfrak{M}'$ gehören zwei symmetrisch zu $\mathfrak{S}$ liegende Punkte z_2, die mit z_1 zusammen ein brauchbares Paar bilden, nämlich die beiden Punkte, deren Bilder bei der Abbildung (1. 4) nach $\gamma(\zeta_1)$ fallen; zu jedem z_1 auf dem Rande von $\mathfrak{M}'$ gehört in demselben Sinne ein z_2 auf $\mathfrak{S}$. Zu jedem inneren Punkt von $\mathfrak{M}'$ als z_1 gehören also zwei verschiedene Elemente in der Menge $\mathfrak{M}$ der brauchbaren Paare $\mathfrak{z} = (z_1, z_2)$, zu jedem Randpunkt eines. Diese Paare lassen sich also umkehrbar eindeutig und stetig den Punkten der Vorder- und Rückseite von $\mathfrak{M}'$ zuordnen. Für $\mathfrak{M}$ sind daher die drei folgenden Fälle zu unterscheiden:

$\{\mathbf{1}; 1\}$. $\mathfrak{M}$ ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit vom Geschlecht 2. Es gibt auf $\mathfrak{M}$ zwei Symmetriestellen $\mathfrak{z} = (z_1, z_2)$ mit $z_1 = z_2$: sie gehen aus dem Symmetriezentrum σ hervor; ihre Bilder in $\mathfrak{M}'$ liegen symmetrisch zu $\mathfrak{S}$, also nicht auf $\mathfrak{S}$.

$\{\mathbf{1}; 2\}$. $\mathfrak{M}$ besteht aus zwei punktfremden geschlossenen zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten vom Geschlecht 1; es gibt keine Symmetriestelle.

$\{\mathbf{1}; 1, 2\}$. $\mathfrak{M}$ besteht aus zwei geschlossenen zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten vom Geschlecht 1, die einen Punkt $\mathfrak{z} = (z_1, z_2)$ mit $z_1 = z_2$ gemeinsam haben.

Den letzten Fall schließen wir vorerst aus der Betrachtung aus.

$\mathfrak{M}$ ist, den Grenzfall $\{\mathbf{1}; 1, 2\}$ ausgenommen, eine stetig differenzierbare Mannigfaltigkeit, d. h. die Umgebung einer jeden Stelle ist das umkehrbar eindeutige Bild eines ebenen Gebietes, wobei z_1 und z_2 stetig differenzierbare Funktionen der Parameter dieses Gebietes sind. Man ersieht das aus der Darstellung von $\mathfrak{M}$ durch die Vorder- und Rückseite von $\mathfrak{M}'$.

Auf $\mathfrak{M}$ ist nun jede Funktion aus $\mathfrak{K}_I$, wenn ihre zusätzlichen Nullstellen z_1 und z_2 voneinander verschieden sind, zweimal vertreten, nämlich durch $\mathfrak{z} = (z_1, z_2)$ und durch $\mathfrak{z} = (z_2, z_1)$, dagegen nur einmal, wenn ihre zusätzlichen Nullstellen zusammenfallen.

1. 4. $\mathfrak{M}$ hängt von z_0 ab, und zwar, wie wir beweisen wollen, stetig im Sinne der folgenden Erklärung: Ist $\mathfrak{M}(p)$ eine von einem Parameter p abhängende abgeschlossene Punktmenge, so heißt die Abhängigkeit für $p = p_0$ stetig, wenn $\mathfrak{M}(p)$ für alle p mit hinreichend kleinem $|p - p_0|$ in eine beliebig kleine Umgebung jedes Punktes von $\mathfrak{M}(p_0)$ eindringt, während es zu jedem Punkt, der nicht zu $\mathfrak{M}(p_0)$ gehört, eine Umgebung gibt, in die kein solches $\mathfrak{M}(p)$ eindringt[5]).

[5]) Der zugrundeliegende Limesbegriff ist der des abgeschlossenen Limes einer Mengenfolge. Vgl. F. HAUSDORFF, Mengenlehre. 3. Aufl., S. 145—150.

Bei allen von z_0 als Parameter abhängenden Gebilden, wie $\Delta^{(2)}$, Δ, $\mathfrak{M}$ fügen wir, wenn wir verschiedene Werte desselben nebeneinander betrachten, den jeweiligen Wert in Klammer bei. Es sei $z_0^{(0)}$ irgendeine feste Stelle, $z_0^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ eine beliebig herausgegriffene Folge von Stellen aus $\mathfrak{B}$ mit $\lim z_0^{(\nu)} = z_0^{(0)}$; ferner sei $\mathfrak{M}^{(\nu)} = \mathfrak{M}(z_0^{(\nu)})$, $\mathfrak{M}^{(0)} = \mathfrak{M}(z_0^{(0)})$, $\mathfrak{z}^{(\nu)} = (z_1^{(\nu)}, z_2^{(\nu)})$ eine Stelle auf $\mathfrak{M}^{(\nu)}$. Dann ist zu zeigen: a) Jede Stelle $\mathfrak{z}^{(0)} = (z_1^{(0)}, z_2^{(0)})$ von $\mathfrak{M}^{(0)}$ ist Häufungsstelle einer gewissen Folge von Stellen $\mathfrak{z}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. b) Jede Häufungsstelle einer Folge $\mathfrak{z}^{(\nu)}$ liegt auf $\mathfrak{M}^{(0)}$. b) folgt daraus, daß nach der Erklärung von $\mathfrak{z}^{(\nu)}$ für jedes ν gilt (vgl. (1. 1)): $\sum_{i=0}^{2} \gamma(z_i^{(\nu)}) = \alpha$. Macht man den Grenzübergang über eine Folge von Werten ν, für die $\mathfrak{z}^{(\nu)}$ konvergiert, so folgt diejenige Gleichung, die besagt, daß der zugehörige $\lim \mathfrak{z}^{(\nu)}$ auf $\mathfrak{M}^{(0)}$ liegt. — Um a) einzusehen, bezeichnen wir die zwei Umkehrungen jeder der beiden Abbildungen (1. 3) und (1. 4) bzw. mit

$$z_1 = \gamma^{-1'}(\tau), \quad z_1 = \gamma^{-1''}(\tau); \tag{1. 7}$$

$$z_2 = \gamma_{z_0}^{-1'}(\tau), \quad z_2 = \gamma_{z_0}^{-1''}(\tau). \tag{1. 8}$$

Diese Abbildungen sind in $\Delta^{(1)}$ bzw. $\Delta^{(2)}$ stetig; die Abbildungen (1. 8) hängen ferner in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $\Delta^{(2)}$ gleichmäßig stetig von z_0 ab; das ergibt sich beispielsweise für $\gamma_{z_0}^{-1'}$ aus der folgenden, den Zusammenhang mit $\gamma^{-1'}$ angebenden Darstellung (vgl. (1. 4)), zusammen mit der gleichmäßigen Stetigkeit von $\gamma^{-1'}$ in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $\Delta^{(1)}$:

$$\gamma_{z_0}^{-1'}(\tau) = \gamma^{-1'}(\alpha - \gamma(z_0) - \tau).$$

$z_1^{(0)}$, $z_2^{(0)}$ gehen nun aus einer bestimmten Stelle $\tau^{(0)} \in \Delta(z_0^{(0)})$ hervor, indem man je eine der beiden Abbildungen (1. 7) und (1. 8) mit $z_0 = z_0^{(0)}$ auf sie anwendet, sagen wir jeweils die erste:

$$z_1^{(0)} = \gamma^{-1'}(\tau^{(0)}), \quad z_2^{(0)} = \gamma_{z_0^{(0)}}^{-1'}(\tau^{(0)}).$$

$\tau^{(0)}$ ist aber Häufungspunkt einer Folge von Punkten $\tau^{(\nu)} \in \Delta(z_0^{(\nu)})$. Wenden wir auf $\tau^{(\nu)}$ je die erste der Abbildungen (1. 7), (1. 8) mit $z_0 = z_0^{(\nu)}$ an, so erhalten wir

$$z_1^{(\nu)} = \gamma^{-1'}(\tau^{(\nu)}), \quad z_2^{(\nu)} = \gamma_{z_0^{(\nu)}}^{-1'}(\tau^{(\nu)}).$$

Diese Stelle $\mathfrak{z}^{(\nu)} = (z_1^{(\nu)}, z_2^{(\nu)})$ liegt auf $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ und die Folge der $\mathfrak{z}^{(\nu)}$ strebt wegen der genannten Stetigkeitseigenschaften der Abbildungen (1. 7) und (1. 8) gegen $\mathfrak{z}^{(0)}$.

Auf entsprechende Weise erkennt man, daß die Symmetriestellen von $\mathfrak{M}(z_0)$ stetig von z_0 abhängen.

1. 5. Durch $|F(z^*)|$ mit $F(z) \in \mathfrak{R}_I'$ ist auf $\mathfrak{M}$ eine noch von z^* als Parameter abhängende Funktion $\Phi(\mathfrak{z}; z^*)$ erklärt:

$$\Phi(\mathfrak{z}; z^*) = |F(z^*)| = \exp\left(-g(z_0; z^*) - g(z_1; z^*) - g(z_2; z^*)\right) \tag{1. 9}$$

$$F(z) \in \mathfrak{R}_I', \quad \mathfrak{z} = (z_1, z_2) \in \mathfrak{M}.$$

Sie ist auf ihre stationären Stellen hin zu untersuchen. Soweit wir nicht gerade auf die Abhängigkeit der auftretenden Funktionen von dem Parameter z^* zu achten haben, soll er nicht mit angeschrieben werden.

2. Stationäre Stellen einer Funktion auf einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit. Da ich keine Darstellung kenne, in der die hier allein in Frage kommenden einfachen Fälle der benötigten Sätze, insbesondere der KRONECKERschen Formel, in entsprechend einfacher Weise entwickelt werden, so schalte ich eine solche Darstellung ein.

2. 1. Die Kroneckersche Formel[6]. $\mathfrak{M}$ sei eine zweidimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit, $\Phi(\mathfrak{z})$ eine stetige reelle Funktion auf ihr. Ist $\mathfrak{z}_0$ eine beliebige Stelle auf $\mathfrak{M}$, so bestehen zunächst die beiden folgenden Möglichkeiten für das Verhalten von $\Phi(\mathfrak{z})$ in der Umgebung von $\mathfrak{z}_0$:

a) Es gibt beliebig kleine Umgebungen von $\mathfrak{z}_0$, in denen Stellen $\mathfrak{z}$ mit $\Phi(\mathfrak{z}) > \Phi(\mathfrak{z}_0)$ und solche mit $\Phi(\mathfrak{z}) < \Phi(\mathfrak{z}_0)$ liegen.

b) In jeder hinreichend kleinen Umgebung von $\mathfrak{z}_0$ ist für $\mathfrak{z} \neq \mathfrak{z}_0$ entweder $\Phi(\mathfrak{z}) \leqq \Phi(\mathfrak{z}_0)$ oder es ist $\Phi(\mathfrak{z}) \geqq \Phi(\mathfrak{z}_0)$.

Wir setzen nun voraus: Für den Fall b), daß das Gleichheitszeichen jeweils ausgeschlossen ist, dann hat Φ in $\mathfrak{z}_0$ ein Maximum bzw. Minimum; für den Fall a), daß es Umgebungen von $\mathfrak{z}_0$ gibt, die in Teilgebiete mit $\mathfrak{z}_0$ als gemeinsamem Randpunkt zerfallen, in denen $\Phi(\mathfrak{z}) > \Phi(\mathfrak{z}_0)$ oder $\Phi(\mathfrak{z}) < \Phi(\mathfrak{z}_0)$ gilt, und die durch stetige Kurven mit $\Phi(\mathfrak{z}) = \Phi(\mathfrak{z}_0)$ voneinander getrennt werden. Ist nun a_1) die Anzahl dieser Gebiete gleich 2, so heißt $\mathfrak{z}_0$ ein gewöhnlicher Punkt, $\Phi(\mathfrak{z}_0)$ ein gewöhnlicher Wert; ist dagegen a_2) jene Anzahl gleich $2(k+1)$ mit $k > 0$, so heißt $\mathfrak{z}_0$ ein k-facher Sattelpunkt, $\Phi(\mathfrak{z}_0)$ ein solcher Sattelwert.

Maxima, Minima und Sattelwerte werden zusammenfassend als stationäre Werte, die Stellen, in denen sie auftreten, als stationäre Stellen bezeichnet. Wir setzen voraus, daß sie isoliert liegen und also nur in endlicher Anzahl auftreten. — Die durch $\Phi(\mathfrak{z}) = \text{const}$ gekennzeichneten Punktmengen auf $\mathfrak{M}$ bestehen, abgesehen von isolierten Punkten, die den Maxima und Minima entsprechen, aus geschlossenen stetigen Kurven und heißen die Niveaulinien von Φ. Durch jeden Punkt geht genau eine solche, abgesehen von den stationären Stellen: durch die Stellen der Maxima und Minima geht keine, durch die Sattelpunkte gehen mehrere. — Wir beweisen nun den

Satz *(KRONECKERsche Formel): Ist χ die Eulersche Charakteristik von $\mathfrak{M}$, $m^{(0)}$ die Anzahl der Minima von $\Phi(\mathfrak{z})$ auf $\mathfrak{M}$, $m^{(1)}$ die der Sattelwerte, jeder mit seiner Vielfachheit gezählt, $m^{(2)}$ die der Maxima, so gilt:*

$$-m^{(0)} + m^{(1)} - m^{(2)} = \chi.$$

[6]) Vgl. M. MORSE, Trans. Amer. math. Soc. **27** (1925), 345—396. W. THRELFALL, J.-Ber. Deutsche Math. Vereinig. **51** (1941), 14—33.

Ist insbesondere $\mathfrak{M}$ zweiseitig und vom Geschlecht p, so ist

$$-m^{(0)}+m^{(1)}-m^{(2)}=2p-2.$$

Beweis. Sind α^0, α^1, α^2 bzw. die Anzahlen der Ecken, Kanten und Flächen einer beliebigen Triangulation von $\mathfrak{M}$, so ist $\chi=-\alpha^0+\alpha^1-\alpha^2$. Wir werden nun eine Triangulation von $\mathfrak{M}$ benutzen, an der insbesondere die Niveaulinien von Φ beteiligt sind, die zu den stationären Werten gehören.

Ist c ein gewöhnlicher Wert, so besteht die Niveaulinie $\Phi(\mathfrak{z})=c$ aus einer oder mehreren einfach geschlossenen Komponenten. — Im Innern eines schlichtartigen Teilbereiches von $\mathfrak{M}$, dessen Rand zu einer Niveaulinie gehört, liegt mindestens ein Maximum oder Minimum von Φ; denn es können nicht zugleich das Maximum und das Minimum von Φ für einen solchen Bereich auf seinem Rande liegen.

Ist $c_0=\Phi(\mathfrak{z}_0)$ ein Minimum, so kann eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{z}^{(0)}$ so klein gewählt werden, daß in ihr und auf ihrem Rande R gilt: $\Phi(\mathfrak{z})>\Phi(\mathfrak{z}_0)$ und daß dort keine weiteren stationären Stellen liegen. $\eta>c_0$ sei das Minimum von Φ auf R, c_0' ein Wert mit $c_0<c_0'<\eta$, $\mathfrak{M}(\mathfrak{z}_0;\ c_0,\ c_0')$ die größte zusammenhängende, $\mathfrak{z}_0$ enthaltende Teilmenge von $\mathfrak{M}$, auf der $c_0\leqq\Phi(\mathfrak{z})\leqq c_0'$ gilt; sie liegt ganz in $\mathfrak{U}$; ihr Rand N_0' gehört zu der Niveaulinie $\Phi(\mathfrak{z})=c_0'$ und besteht aus einer einzigen Komponenten, da sonst in $\mathfrak{U}$ mehr als eine stationäre Stelle läge. Also ist $\mathfrak{M}(\mathfrak{z}_0;\ c_0,\ c_0')$ einfach zusammenhängend.

Es sei ferner c_1 ein gewöhnlicher Wert von Φ, N_1 eine Komponente der Niveaulinie $\Phi(\mathfrak{z})=c_1$. Wir überdecken N_1 mit endlich vielen der Umgebungen seiner Punkte, deren Existenz wir eingangs (Fall a). insbesondere a_1)) vorausgesetzt hatten. Die Teilgebiete derselben, in denen $\Phi(\mathfrak{z})>c_1$ gilt, überdecken einen Ring $\mathfrak{R}(N_1)$, dessen eine Randkomponente N_1 ist, während auf der andern $\Phi(\mathfrak{z})>c_1$ gilt. Genau wie soeben c_0', finden wir nun einen gewöhnlichen Wert $c_1'>c_1$ und einen zugehörigen größten Ringbereich $\mathfrak{R}(N_1;\ c_1,\ c_1')$ auf $\mathfrak{M}$, in dem $c_1\leqq\Phi(\mathfrak{z})\leqq c_1'$ gilt, dessen eine Randkomponente N_1 ist, während die andere zu der Niveaulinie $\Phi(\mathfrak{z})=c_1'$ gehört.

Haben nun c_0 und $\mathfrak{z}_0$ dieselbe Bedeutung wie vorhin und ist $c_0<c\leqq c'$ ein von stationären Werten von Φ freies Intervall, so können wir an den vorhin konstruierten einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{M}(\mathfrak{z}_0;\ c_0,\ c_0')$ (falls $c_0'<c'$ ist) einen Ring $\mathfrak{R}(N_0';\ c_0',\ c_0'')$ mit $c_0'<c_0''\leqq c'$ anschließen und erhalten so einen einfach zusammenhängenden $\mathfrak{M}(\mathfrak{z}_0;\ c_0,\ c_0'')$; dieses Verfahren können wir fortsetzen bis zur Gewinnung eines $\mathfrak{M}(\mathfrak{z}_0;\ c_0,\ c')$. Entsprechend können wir von einem Maximum ausgehend verfahren, und ebenso einen Ring $\mathfrak{R}(N_1;\ c_1,\ c_1')$ erweitern. So erhalten wir den

Hilfssatz. Ist $c_0=\Phi(\mathfrak{z}_0)$ ein Minimum von Φ und ist das Intervall $c_0<c\leqq c'$ von stationären Stellen frei, so ist der $\mathfrak{z}_0$ enthaltende, durch $c_0\leqq\Phi(\mathfrak{z})\leqq c'$ gekennzeichnete größte Teilbereich $\mathfrak{M}(\mathfrak{z}_0;\ c_0,\ c')$ von $\mathfrak{M}$

einfach zusammenhängend, hat also die Charakteristik -1. — Dasselbe gilt, wenn $c_0 = \Phi(\mathfrak{z}_0)$ ein Maximum ist und alle Ungleichheitszeichen umgekehrt werden. — Ist $c_1 \leqq c \leqq c_2$ ein von stationären Werten von Φ freies Intervall, so besteht der durch $c_1 \leqq \Phi(\mathfrak{z}) \leqq c_2$ gekennzeichnete Teilbereich von $\mathfrak{M}$ aus lauter Ringbereichen, hat also die Charakteristik 0.

Nun seien $a_0, a_1, \ldots, a_m$ die stationären Werte von Φ, nach wachsender Größe geordnet. Wir schalten zwischen je zwei von ihnen einen gewöhnlichen Wert c_μ ein: $a_{\mu-1} < c_\mu < a_\mu$, und erklären gewisse Teilmengen $\overline{\mathfrak{M}}_\mu$ und $\underline{\mathfrak{M}}_\mu$ von $\mathfrak{M}$ durch die folgenden Ungleichungen:

$$\overline{\mathfrak{M}}_\mu\colon\ c_\mu \leqq \Phi(\mathfrak{z}) \leqq a_\mu; \quad \underline{\mathfrak{M}}_\mu\colon\ a_\mu \leqq \Phi(\mathfrak{z}) \leqq c_{\mu+1},$$

wobei wir jedoch die einem etwaigen Minimum bzw. Maximum a_μ entsprechenden isolierten Punkte ausschließen. Zu dem stationären Wert a_μ können mehrere stationäre Stellen $\mathfrak{z}_\mu^{(1)}, \ldots, \mathfrak{z}_\mu^{(j)}$ gehören. Es sei etwa $\mathfrak{z}_\mu^{(i)}$ Stelle eines Maximums; dann enthält $\overline{\mathfrak{M}}_\mu$ eine einfach zusammenhängende Komponente $\mathfrak{M}(\mathfrak{z}_\mu^{(i)};\ c_\mu,\ a_\mu)$. Ebenso gehört zu jedem Minimum eine einfach zusammenhängende Komponente $\mathfrak{M}(\mathfrak{z}_\mu^{(i)};\ a_\mu,\ c_{\mu+1})$ von $\underline{\mathfrak{M}}_\mu$. Ist dagegen $\mathfrak{z}_\mu^{(i)}$ ein k-facher Sattelpunkt, so approximieren wir z. B. $\overline{\mathfrak{M}}_\mu$ durch eine aufsteigende Folge $\overline{\mathfrak{M}}_\mu^{(\nu)}$, die mittels einer wachsenden Folge $\bar{a}_\mu^{(\nu)}$ mit $\lim\limits_{\nu} \bar{a}_\mu^{(\nu)} = a_\mu$ durch die Ungleichungen

$$\overline{\mathfrak{M}}_\mu^{(\nu)}\colon\ c_\mu \leqq \Phi(\mathfrak{z}) \leqq \bar{a}_\mu^{(\nu)}$$

erklärt ist. Da die Intervalle $c_\mu \leqq c \leqq \bar{a}_\mu^{(\nu)}$ nur gewöhnliche Werte enthalten, so besteht $\overline{\mathfrak{M}}_\mu^{(\nu)}$ aus lauter Ringbereichen, hat also die Charakteristik 0. Jede beliebig kleine Umgebung des k-fachen Sattelpunktes $\mathfrak{z}_\mu^{(i)}$ enthält, bei hinreichend großem ν, $k+1$ Teilgebiete, die zu $\overline{\mathfrak{M}}_\mu^{(\nu)}$ gehören, bei $\nu \to \infty$ gehen sie in $k+1$ der unter a_2) erwähnten Teilgebiete über, die $\mathfrak{z}_\mu^{(i)}$ als gemeinsamen Randpunkt haben; d. h. bei diesem Grenzübergang werden $k+1$ Randpunkte von $\overline{\mathfrak{M}}_\mu^{(\nu)}$ in $\mathfrak{z}_\mu^{(i)}$ identifiziert. Denken wir uns nun $\overline{\mathfrak{M}}_\mu$ irgendwie trianguliert mit $\mathfrak{z}_\mu^{(i)}$ als Ecke, so gibt es eine entsprechende Triangulation von $\overline{\mathfrak{M}}_\mu^{(\nu)}$, die k Ecken mehr, aber gleichviel Kanten und Flächen besitzt; die Charakteristik von $\overline{\mathfrak{M}}_\mu^{(\nu)}$ wird also durch das Hinzutreten des Sattelpunktes bei $\nu \to \infty$ um k erhöht. Sie ergibt sich also, wenn wir noch das vorige Ergebnis über die Maxima hinzunehmen, zu

$$\bar{\chi}_\mu = m_\mu^{(1)} - m_\mu^{(2)},$$

wo $m_\mu^{(1)}$ die Anzahl der Sattelwerte a_μ, mit Vielfachheiten gezählt, $m_\mu^{(2)}$ die Anzahl der Maxima a_μ bedeutet. Der zu $\Phi(\mathfrak{z}) = a_\mu$ gehörige

Kantenzug von $\mathfrak{M}_\mu$ hat $m_\mu^{(1)}$ Kanten mehr als Ecken, denn vor dem Grenzübergang waren beide Anzahlen gleich. Durch entsprechende Überlegungen findet man für die Charakteristik von $\underline{\mathfrak{M}}_\mu$

$$\chi_\mu = -m_\mu^{(0)} + m_\mu^{(1)},$$

wo $m_\mu^{(0)}$ die Anzahl der Minima a_μ bedeutet.

Setzen wir nun alle Komplexe $\overline{\mathfrak{M}}_\mu$ und $\underline{\mathfrak{M}}_\mu$ zusammen, indem wir Kanten und Ecken, die in $\mathfrak{M}$ identisch sind, identifizieren, so gehen bei der Zusammenfügung längs Niveaulinien, die zu den gewöhnlichen Werten c_μ gehören, gleichviel Kanten und Ecken verloren, so daß sich dabei die Charakteristiken einfach addieren. Dagegen gehen beim Zusammenfügen von $\overline{\mathfrak{M}}_\mu$ und $\underline{\mathfrak{M}}_\mu$ bei festem μ $m_\mu^{(1)}$ Kanten mehr als Ecken verloren, so daß also in leicht verständlicher Bezeichnungsweise gilt:

$$\chi(\overline{\mathfrak{M}}_\mu + \underline{\mathfrak{M}}_\mu) = \chi_\mu + \chi_\mu - m_\mu^{(1)} = -m_\mu^{(0)} + m_\mu^{(1)} - m_\mu^{(2)}.$$

Summierung über μ ergibt schließlich die Behauptung des Satzes

2. 2. Stationäre Stellen auf einer implicite gegebenen Mannigfaltigkeit. In dem uns interessierenden Fall ist die zweidimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ einem vierdimensionalen cartesischen Raum $\mathfrak{E}$ eingebettet, nämlich dem Raum der Paare $\mathfrak{z} = (z_1, z_2)$ bei frei veränderlichen z_1, z_2, aus dem sie durch das Gleichungspaar (1. 1) ausgesondert wird. Verwenden wir die folgenden Abkürzungen:

$$\gamma_\iota(\mathfrak{z}) = \gamma_\iota(z_1) + \gamma_\iota(z_2),\ 2\pi - \gamma_\iota(z_0) = c_\iota \qquad (\iota = 1, 2), \tag{2. 1}$$

so können wir jenes Gleichungspaar in der Form schreiben:

$$\gamma_1(\mathfrak{z}) = c_1,\quad \gamma_2(\mathfrak{z}) = c_2. \tag{2. 2}$$

Die auf $\mathfrak{M}$ zu untersuchende Funktion — an Stelle von $\Phi(\mathfrak{z})$ (vgl. (1. 9)) werden wir meist $\log \Phi(\mathfrak{z})$ nehmen, wobei wir den konstanten Bestandteil $-g(z_0)$ weglassen dürfen — ist durch

$$-g(\mathfrak{z}) = -g(z_1) - g(z_2) \tag{2. 3}$$

in dem $\mathfrak{M}$ umgebenden Raum erklärt. Wir wollen die für die Auffindung und Untersuchung der stationären Stellen von $g(\mathfrak{z})$ auf $\mathfrak{M}$ benötigten allgemeinen Sätze zusammenstellen und, soweit es zweckmäßig erscheint, beweisen und sehen daher von der besonderen Bedeutung von $g(\mathfrak{z})$, $\gamma_1(\mathfrak{z})$, $\gamma_2(\mathfrak{z})$ ab; wir setzen nur voraus, daß es sich um reelle analytische Funktionen eines Systems

$$\mathfrak{z} = (t_1, t_2, t_3, t_4)$$

von vier reellen Veränderlichen handle und daß durch die Gleichungen (2. 2) eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ erklärt werde.

2. 2. 1. In der Umgebung jeder Stelle $\mathfrak{z}^{(0)}$ von $\mathfrak{M}$ lassen sich die Koordinaten eines nur auf $\mathfrak{M}$ variierenden Punktes $\mathfrak{z}$ als analytische Funktionen eines Paares $v = (v_1, v_2)$ von reellen Ortsparametern darstellen:

$$t_\iota = \psi_\iota(v) \quad (\iota = 1, 2, 3, 4),$$

wobei für die Wahl von v und der ψ_ι soviel Freiheit besteht, als durch die Funktionalgleichungen

$$\gamma_1(\psi_1(v), \ldots, \psi_4(v)) = c_1, \quad \gamma_2(\psi_1(v), \ldots, \psi_4(v)) = c_2$$

offen gelassen wird. Es darf vorausgesetzt werden, daß $\mathfrak{z}^{(0)}$ und $v_1 = v_2 = 0$ einander entsprechen. $g(\mathfrak{z})$, als Funktion auf $\mathfrak{M}$ betrachtet, erscheint dann in der Umgebung von $\mathfrak{z}^{(0)}$ ebenfalls als Funktion von v:

$$h(v) = g(\psi_1(v), \ldots, \psi_4(v)).$$

Nach der Euler-Lagrangeschen Multiplikatorenregel hat nun $g(\mathfrak{z})$ auf $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{z}^{(0)}$, d. h. $h(v)$ in $v = (0, 0)$, dann und nur dann eine stationäre Stelle, wenn es ein Paar $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ reeller Größen gibt, derart, daß sich die Funktion

$$\mathfrak{g}_\lambda(\mathfrak{z}) = g(\mathfrak{z}) + \lambda_1 \gamma_1(\mathfrak{z}) + \lambda_2 \gamma_2(\mathfrak{z}) \tag{2. 4}$$

als Funktion der vier Veränderlichen $t_1, \ldots, t_4$ in $\mathfrak{z}^{(0)}$ stationär verhält, d. h. daß ihre partiellen Ableitungen nach den vier Veränderlichen in $\mathfrak{z}^{(0)}$ verschwinden:

$$\mathfrak{g}_{\lambda t_\iota}(\mathfrak{z}^{(0)}) = 0 \qquad (\iota = 1, 2, 3, 4). \tag{2. 5}$$

Um also die stationären Stellen von $g(\mathfrak{z})$ auf $\mathfrak{M}$ zu finden, haben wir unter den (von λ abhängenden) Lösungen des Gleichungssystems (2. 5) diejenigen herauszusuchen, die Stellen auf $\mathfrak{M}$ bezeichnen, also noch den Gleichungen (2. 2) genügen.

2. 2. 2. Wir nehmen an, $\mathfrak{z}^{(0)} = (0, 0, 0, 0)$ sei eine solche Stelle. Für ihre weitere Untersuchung sind zunächst die Glieder 2. Ordnung in der Entwicklung von $h(v)$ bei $v = (0, 0)$ heranzuziehen. Ist der Rang der von ihnen gebildeten quadratischen Form $Q(v)$ gleich 2, so liegt (je nach ihrer Signatur) ein Maximum, ein Minimum oder ein *einfacher* Sattelwert vor. Es wird sich für uns nur darum handeln, mehrfache Sattelwerte auszuschließen, und daher brauchen wir nur den Rang von $Q(v)$ zu untersuchen.

Da $\gamma_1(\mathfrak{z})$ und $\gamma_2(\mathfrak{z})$ auf $\mathfrak{M}$ konstant sind, so ist dort

$$\mathfrak{g}_\lambda(\mathfrak{z}) = g(\mathfrak{z}) + \text{const},$$

und dies gilt insbesondere für dasjenige λ, das durch die Multiplikatorenregel auf $\mathfrak{z}^{(0)}$ führt. Wir können also statt $h(v)$ auch die Funktion

$$\mathfrak{h}_\lambda(v) = \mathfrak{g}_\lambda(\psi_1(v), \ldots, \psi_4(v))$$

mit dem genannten λ untersuchen. Da nun in der Entwicklung von $\mathfrak{g}_\lambda(\mathfrak{z})$ die linearen Glieder fehlen, so erhält man die quadratische Form $\mathfrak{Q}_\lambda(v) = Q(v)$ der Glieder 2. Ordnung von $\mathfrak{h}_\lambda(v)$ allein aus den quadratischen Gliedern $\mathfrak{P}_\lambda(\mathfrak{z})$ von $\mathfrak{g}_\lambda(\mathfrak{z})$, und zwar, indem man dort die t_ι durch die Glieder 1. Ordnung ihrer Entwicklung nach v_1, v_2 ersetzt; das sind Linearformen in v_1, v_2, die, in die Glieder 1. Ordnung der Entwicklungen von γ_1 und γ_2 eingesetzt, diese identisch verschwinden lassen, im übrigen aber, in Anbetracht der für die Wahl der v bestehenden Freiheit, willkürlich sind. D. h. die t_ι in $\mathfrak{P}_\lambda(\mathfrak{z})$ sind den beiden linearen Gleichungen zu unterwerfen, die sich aus (2. 2) durch Nullsetzen der Glieder 1. Ordnung der Entwicklung bei $\mathfrak{z}^{(0)}$ ergeben. Die Koeffizientensysteme dieser linearen Gleichungen sind:

$$\mathfrak{u}^{(1)} = (\gamma_{1t_1}, \ldots, \gamma_{1t_4}), \quad \mathfrak{u}^{(2)} = (\gamma_{2t_1}, \ldots, \gamma_{2t_4}),$$

je für $\mathfrak{z} = (0, 0, 0, 0)$.

Mit $\mathfrak{p}_\lambda$ bezeichnen wir die Matrix der Form $\mathfrak{P}_\lambda(\mathfrak{z})$, mit $\tilde{\mathfrak{t}} = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ einen Zeilenvektor, mit $\mathfrak{t}$ den Spaltenvektor mit denselben Komponenten. Dann haben wir also den Rang r der quadratischen Form

$$\mathfrak{P}_\lambda(\mathfrak{z}) = \tilde{\mathfrak{t}}\,\mathfrak{p}_\lambda\,\mathfrak{t}$$

zu untersuchen, wenn sie vermöge der linearen Gleichungen

$$\mathfrak{u}^{(1)}\,\mathfrak{t} = 0, \quad \mathfrak{u}^{(2)}\,\mathfrak{t} = 0 \tag{2. 6}$$

auf eine solche von zwei Veränderlichen reduziert wird.

Wir nehmen weiterhin an, $\mathfrak{p}_\lambda$ sei vom Range 4. Wir deuten $\mathfrak{t}$ als Punktkoordinaten, die $\mathfrak{u}$ als Ebenenkoordinaten im dreidimensionalen projektiven Raum. Dann stellt $\mathfrak{P}_\lambda(\mathfrak{z}) = 0$ eine Quadrik, (2. 6) eine Gerade L dar, und r ist gleich 2, 1 oder 0, je nachdem ob L die Quadrik in zwei Punkten trifft, sie berührt oder ganz in ihr liegt. Bezeichnet L' die zu L in bezug auf $\mathfrak{P}_\lambda = 0$ konjugierte Polare, so deckt sich diese Fallunterscheidung mit der folgenden: L und L' treffen sich nicht; sie treffen sich in einem Punkt; sie fallen zusammen. Man erhält L', indem man die Pole zu den Ebenen $\mathfrak{u}^{(1)}$ und $\mathfrak{u}^{(2)}$ in bezug auf $\mathfrak{P}_\lambda = 0$ aufsucht und sie durch eine Gerade verbindet. $\mathfrak{P}_\lambda = 0$, in Ebenenkoordinaten geschrieben, lautet:

$$\mathfrak{u}\,\mathfrak{p}_\lambda^{-1}\,\tilde{\mathfrak{u}} = 0;$$

die Pole von $\mathfrak{u}^{(1)}$ und $\mathfrak{u}^{(2)}$ sind also:

$$\mathfrak{p}_\lambda^{-1}\,\tilde{\mathfrak{u}}^{(1)}, \quad \mathfrak{p}_\lambda^{-1}\,\tilde{\mathfrak{u}}^{(2)},$$

und L', als Punktgebilde in Parameterdarstellung mit den Parametern μ_1, μ_2 geschrieben, ist:

$$\mathfrak{t} = \mu_1\mathfrak{p}_\lambda^{-1}\,\tilde{\mathfrak{u}}^{(1)} + \mu_2\mathfrak{p}_\lambda^{-1}\,\tilde{\mathfrak{u}}^{(2)}.$$

Um L' auf den Schnitt mit L hin zu untersuchen, hat man dieses t in (2. 6) einzusetzen und nach der Lösbarkeit des entstandenen Gleichungssystems für μ_1, μ_2 zu fragen. So ergibt sich: r ist gleich dem Rang der Matrix:

$$\begin{pmatrix} u^{(1)}\, \mathfrak{p}_\lambda^{-1}\, \tilde{u}^{(1)} & u^{(1)}\, \mathfrak{p}_\lambda^{-1}\, \tilde{u}^{(2)} \\ u^{(2)}\, \mathfrak{p}_\lambda^{-1}\, \tilde{u}^{(1)} & u^{(2)}\, \mathfrak{p}_\lambda^{-1}\, \tilde{u}^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{2. 7}$$

2. 3. Die Maxima einer stetigen Funktion auf einer veränderlichen Mannigfaltigkeit. Beim Abschluß unseres Beweises werden wir gewisse Grenzfälle (wie z. B. den Fall $\{\mathbf{1}; 1, 2\}$) ausschließen müssen. Dazu dient uns der folgende

Hilfssatz. Es sei $\mathfrak{M}(p)$ eine abgeschlossene Punktmenge in dem cartesischen Raum $\mathfrak{E}$ der Vektoren $\mathfrak{z} = (t_1, t_2, t_3, t_4)$, die im Sinne der in **1**. 4. gegebenen Definition stetig von dem Parameter p, $f(\mathfrak{z}; q)$ eine in $\mathfrak{E}$ erklärte stetige Funktion, die gleichmäßig stetig von dem Parameter q abhänge; p und q können dabei selbst in mehrdimensionalen Räumen variieren. $f(\mathfrak{z}; q)$ habe für jedes Parametersystem p, q auf $\mathfrak{M}(p)$ nur eine endliche Anzahl $m^{(2)}(p, q)$ von relativen Maxima. Sind nun (p_0, q_0) ein bestimmtes Parametersystem, (p_ν, q_ν) eine beliebige Folge solcher Systeme mit $\lim (p_\nu, q_\nu) = (p_0, q_0)$, $\tilde{\mathfrak{z}}_0$ Stelle eines Maximums von $f(\mathfrak{z}; q_0)$ auf $\mathfrak{M}(p_0)$, so gibt es auf jedem $\mathfrak{M}(p_\nu)$ eine Stelle $\tilde{\mathfrak{z}}_\nu$, in der $f(\mathfrak{z}; q_\nu)$ ein Maximum hat, derart, daß gilt:

$$\lim \tilde{\mathfrak{z}}_\nu = \tilde{\mathfrak{z}}_0.$$

Ferner gilt für jedes zu (p_0, q_0) hinreichend nahe benachbarte (p, q):

$$m^{(2)}(p, q) \geqq m^{(2)}(p_0, q_0).$$

Beweis. Die zweite Behauptung ist eine Folge der ersten, denn nach dieser gehört zu jedem Maximum $\tilde{\mathfrak{z}}_0$ mindestens ein benachbartes $\tilde{\mathfrak{z}}$ für $f(\mathfrak{z}; q)$ auf $\mathfrak{M}(p)$, und zu verschiedenen $\tilde{\mathfrak{z}}_0$ gehören verschiedene $\tilde{\mathfrak{z}}$, immer unter der Voraussetzung, daß (p, q) hinreichend nahe bei (p_0, q_0) liegt.

Nun sei U eine Umgebung von $\tilde{\mathfrak{z}}_0$ in $\mathfrak{E}$. $\mathfrak{R}$ ihr Rand. Ferner sei

$$U(p) = (\mathfrak{M}(p), \mathfrak{U}), \qquad R(p) = (\mathfrak{M}(p), \mathfrak{R}).$$

Nach der Erklärung von $\tilde{\mathfrak{z}}_0$ ist es möglich, $\mathfrak{U}$ beliebig klein und dazu ein $\delta > 0$ so zu wählen, daß für

$$\mathfrak{z} \in R(p_0): \qquad f(\mathfrak{z}; q_0) < f(\tilde{\mathfrak{z}}_0; q_0) - \delta \tag{2. 8}$$

gilt. Liegt p hinreichend nahe bei p_0, so liegt wegen der Stetigkeit von $\mathfrak{M}(p)$ jeder Punkt von $R(p)$ so nahe bei $R(p_0)$, daß bei beliebig klein vorgegebenen ε gilt:

$$\max_{\mathfrak{z} \in R(p)} f(\mathfrak{z}; q_0) < \max_{\mathfrak{z} \in R(p_0)} f(\mathfrak{z}; q_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ferner ändert sich $f(\mathfrak{z}; q)$ durch Übergang von q_0 zu einem hinreichend nahe benachbarten q so wenig, daß gilt:

$$(2.9) \qquad \max_{\mathfrak{z} \in R(p)} f(\mathfrak{z}; q) < \max_{\mathfrak{z} \in R(p)} f(\mathfrak{z}; q_0) + \frac{\varepsilon}{2} < \max_{\mathfrak{z} \in R(p_0)} f(\mathfrak{z}; q_0) + \varepsilon.$$

Liegt p hinreichend nahe bei p_0, so gibt es andererseits, wieder wegen der Stetigkeit von $\mathfrak{M}(p)$, auf $U(p)$ einen Punkt $\tilde{\mathfrak{z}}'$, der so nahe bei $\tilde{\mathfrak{z}}_0$ liegt, daß gilt:

$$f(\tilde{\mathfrak{z}}'; q_0) > f(\tilde{\mathfrak{z}}_0; q_0) - \frac{\varepsilon}{2},$$

und beim Übergang von q_0 zu einem hinreichend nahe benachbarten q ändert sich f wieder so wenig, daß gilt:

$$(2.10) \qquad f(\tilde{\mathfrak{z}}'; q) > f(\tilde{\mathfrak{z}}'; q_0) - \frac{\varepsilon}{2} > f(\tilde{\mathfrak{z}}_0; q_0) - \varepsilon.$$

Setzen wir nun $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$, so ist auf $R(p)$ nach (2.8) und (2.9)

$$\max_{\mathfrak{z} \in R(p)} f(\mathfrak{z}; q) < f(\tilde{\mathfrak{z}}_0; q_0) - \frac{2}{3}\delta,$$

und nach (2.10)

$$f(\tilde{\mathfrak{z}}'; q) > f(\tilde{\mathfrak{z}}_0; q_0) - \frac{\delta}{3},$$

also

$$f(\tilde{\mathfrak{z}}'; q) > \max_{\mathfrak{z} \in R(p)} f(\mathfrak{z}; q).$$

Daher wird das Maximum von $f(\mathfrak{z}; q)$ für die abgeschlossene Punktmenge $U(p) + R(p)$ nicht auf $R(p)$ angenommen, sondern in einem innern Punkt $\tilde{\mathfrak{z}}$ von $\mathfrak{U}$; $f(\tilde{\mathfrak{z}}; q)$ ist also auch auf $\mathfrak{M}(p)$ ein relatives Maximum. Da $\mathfrak{U}$ beliebig klein sein kann, so liegt $\tilde{\mathfrak{z}}$ beliebig nahe bei $\tilde{\mathfrak{z}}_0$, w. z. b. w.

3. Die Gesamtzahl der stationären Werte von $|F(z^*)|$ innerhalb von $\mathfrak{R}_1'$. Wir nehmen nun die am Ende von **1.** angekündigte Untersuchung auf.

3. 1. Unter welchen Bedingungen ist eine bestimmte Stelle $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}^{(0)} = (z_1^{(0)}, z_2^{(0)})$ auf $\mathfrak{M}(z_0)$ eine stationäre Stelle für $\Phi(\mathfrak{z}; z^*) = |F(z^*)|$, wenn $\mathfrak{z}$ auf $\mathfrak{M}(z_0)$ variiert? Es gibt dafür zwei Möglichkeiten:

$\{\mathbf{3}; 1'\}$. $\log \Phi(\mathfrak{z}) = -g(z) - g(z_0)$ (vgl. (1.9) und (2.3)) verhält sich in $\mathfrak{z}^{(0)}$ regulär und stationär.

$\{\mathbf{3}; 2'\}$. Mindestens einer der Punkte $z_1^{(0)}$, $z_2^{(0)}$ fällt mit z^* zusammen; dann ist $\Phi(\mathfrak{z}^{(0)}) = 0$, $\Phi(\mathfrak{z})$ hat in $\mathfrak{z}^{(0)}$ ein absolutes Minimum.

3. 2. Die stationären Stellen $\{\mathbf{3}; 1'\}$ ergeben sich aus der Multiplikatorenregel (vgl. **2.** 2. 1.). Es wird sich als zweckmäßig erweisen, bei ihrer Anwendung anstelle von (2.4) homogene Verbindungen der

drei Funktionen zu benutzen. Wir setzen demgemäß, indem wir unter $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ ein System von drei reellen, nicht zugleich verschwindenden Größen verstehen:

$$\mathfrak{g}_\lambda(\mathfrak{z}) = \lambda_0 g(\mathfrak{z}) + \lambda_1 \gamma_1(\mathfrak{z}) + \lambda_2 \gamma_2(\mathfrak{z}).$$

Mit der Bezeichnung

$$\mathfrak{g}_\lambda(z) = \lambda_0 g(z) + \lambda_1 \gamma_1(z) + \lambda_2 \gamma_2(z) \tag{3.1}$$

ist mit Rücksicht auf die Erklärungen (2.1) und (2.3) von $g(\mathfrak{z})$ und $\gamma_\iota(\mathfrak{z})$:

$$\mathfrak{g}_\lambda(\mathfrak{z}) = \mathfrak{g}_\lambda(z_1) + \mathfrak{g}_\lambda(z_2).$$

Setzen wir ferner:

$$z = x + iy; \quad z_\iota = x_\iota + iy_\iota \quad (\iota = 1, 2); \quad (t_1, t_2, t_3, t_4) = (x_1, y_1, x_2, y_2),$$

so ergibt die Multiplikatorenregel: Notwendig für das Vorliegen einer stationären Stelle im Sinne von $\{3; 1'\}$ ist:

$$\mathfrak{g}_{\lambda x}(z_1^{(0)}) = \mathfrak{g}_{\lambda y}(z_1^{(0)}) = \mathfrak{g}_{\lambda x}(z_2^{(0)}) = \mathfrak{g}_{\lambda y}(z_2^{(0)}) = 0$$

für ein gewisses λ, und außerdem, daß $\mathfrak{z}^{(0)} = (z_1^{(0)}, z_2^{(0)})$ auf $\mathfrak{M}$ liegt, d. h. den Periodenbedingungen (1.1) genügt. Zusammen mit $\lambda_0 \neq 0$ sind diese Bedingungen hinreichend.

Eine Stelle $z = \zeta$ mit $\mathfrak{g}_{\lambda x}(\zeta) = \mathfrak{g}_{\lambda y}(\zeta) = 0$ heißt eine kritische Stelle für $\mathfrak{g}_\lambda(z)$; diese Stellen sind identisch mit den Nullstellen von $\mathfrak{G}'_\lambda(z)$. Wir haben also diejenigen Paare $z_1^{(0)}$, $z_2^{(0)}$ aufzusuchen, die Nullstellen einer Funktion $\mathfrak{G}'_\lambda(z)$ mit $\lambda_0 \neq 0$ für dasselbe λ sind, und unter diesen wiederum diejenigen, die Stellen auf $\mathfrak{M}$ bezeichnen, also den Periodenbedingungen genügen.

3. 3. Bei $\lambda_0 \neq 0$ hat $\mathfrak{G}'_\lambda(z)$ nach dem in **1.** 2. angeführten Hilfssatz (vgl. Anmerkung [4])) zwei Nullstellen, falls die auf dem Rande mit dem Gewicht $^1/_2$ mitgezählt werden. Bei $\lambda_0 = 0$ gibt es bei derselben Verabredung eine; doch darf z^* als die zweite gelten, insofern, als bei $\lambda_0 \to 0$ und festen λ_1, λ_2 mindestens eine Nullstelle von $\mathfrak{G}'_\lambda(z)$ gegen z^* konvergiert. Um das einzusehen, denken wir uns um z^* einen ganz zu $\mathfrak{B}$ gehörigen Kreis K beschrieben, auf dessen Rand keine Nullstelle von $\lambda_1 \Gamma'_1 + \lambda_2 \Gamma'_2$ liegt; das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\mathfrak{G}''_\lambda(z)}{\mathfrak{G}'_\lambda(z)} dz$$

ist gleich der Anzahl der Nullstellen weniger Anzahl der Pole von $\mathfrak{G}'_\lambda$ in seinem Inneren (falls keine solche Stelle auf K selbst liegt, eine Voraussetzung, die für $\lambda_0 = 0$ und also auch für alle absolut hinreichend kleinen λ_0 erfüllt ist). Bei $\lambda_0 = 0$ ist das Integral nicht negativ, da dann $\mathfrak{G}'_\lambda$ im Innern von K regulär ist. Es hängt ferner in der Umgebung von $\lambda_0 = 0$ stetig von λ_0 ab und ist stets ganzzahlig, hat also für jedes absolut hinreichend kleine λ_0 denselben Wert,

wie für $\lambda_0 = 0$; da für $\lambda_0 \neq 0$ $\mathfrak{G}'_\lambda$ den Pol z^* im Innern von K hat, so liegt dort bei absolut hinreichend kleinem $\lambda_0 \neq 0$ auch mindestens eine Nullstelle, und das gilt bei beliebig kleinem Radius von K. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wie wir ferner in **1.** 2 gesehen haben, liegt bei $\lambda_0 = 0$ die wirkliche Nullstelle von $\mathfrak{G}'_\lambda$ auf $\mathfrak{S}$, und jeder Punkt von $\mathfrak{S}$ ist bei geeigneter Wahl von λ_1, λ_2 als Nullstelle möglich.

3. 4. Damit läßt sich nun auch die Heranziehung der homogenen Linearverbindungen (3. 1) rechtfertigen, d. h. die Ausnahmestellung, die $\mathfrak{G}'_\lambda$ mit $\lambda_0 = 0$ bei der Anwendung der Multiplikatorenregel hatte, im wesentlichen beseitigen. Wenn nämlich die Punkte $z_1^{(0)}$ und $z_2^{(0)}$ in in „Nullstellen" von $\mathfrak{G}'_\lambda$ mit $\lambda_0 = 0$ in dem hier gebrauchten erweiterten Wortsinne fallen, so deckt sich entweder mindestens einer von ihnen mit z^*, oder beide fallen in die wirkliche Nullstelle von $\mathfrak{G}'_\lambda$, also in ein und denselben Punkt von $\mathfrak{S}$. Falls $(z_1^{(0)}, z_2^{(0)})$ einen Punkt von $\mathfrak{M}$ bezeichnet, so liegt im ersten Falle eine stationäre Stelle nach $\{\mathbf{3}; 2'\}$ vor, während der zweite nur in dem ausgeschlossenen Grenzfall $\{\mathbf{1}; 1, 2\}$ auftreten kann (vgl. **1.** 3). Also können wir sagen:

Eine Stelle $\mathfrak{z}^{(0)} = (z_1^{(0)}, z_2^{(0)})$ auf $\mathfrak{M}$ ist dann und nur dann stationär für $\Phi(\mathfrak{z}; z^*)$, wenn entweder

$\{\mathbf{3}; 1\}$. $z_1^{(0)}$ und $z_2^{(0)}$ Nullstellen (im erweiterten Sinne) einer Funktion $\mathfrak{G}'_\lambda(z)$ sind, oder

$\{\mathbf{3}; 2\}$. mindestens einer der Punkte $z_1^{(0)}$, $z_2^{(0)}$ nach z^* fällt. Diese beiden Fälle schließen sich nicht gegenseitig aus.

Es sind nun weiterhin zwei Unterfälle von $\{\mathbf{3}; 1\}$ zu unterscheiden:

$\{\mathbf{3}; 1_1\}$. $z_1^{(0)}$ und $z_2^{(0)}$ fallen in dieselbe Nullstelle einer Funktion $\mathfrak{G}'_\lambda(z)$.

$\{\mathbf{3}; 1_2\}$. Das Paar $z_1^{(0)}$, $z_2^{(0)}$ ist identisch mit dem Nullstellenpaar $\zeta_\lambda^{(1)}$, $\zeta_\lambda^{(2)}$ einer Funktion $\mathfrak{G}'_\lambda(z)$.

Die drei Fälle $\{\mathbf{3}; 1_1\}$, $\{\mathbf{3}; 1_2\}$, $\{\mathbf{3}; 2\}$ schließen sich nicht gegenseitig aus, es gibt vielmehr die folgenden Grenzfälle, die zugleich zu zwei oder drei der aufgezählten Fälle gehören, was in leicht ersichtlicher Weise durch ihre Bezeichnung kenntlich gemacht wird:

$\{\mathbf{3}; 1_{1,2}\}$. $z_1^{(0)}$ und $z_2^{(0)}$ fallen zusammen in eine doppelte Nullstelle einer Funktion $\mathfrak{G}'_\lambda(z)$.

$\{\mathbf{3}; 1_1, 2\}$. $z_1^{(0)} = z_2^{(0)} = z^*$, d. h., z^* muß in eine Symmetriestelle von $\mathfrak{M}$ fallen, und dies ist, wie wir sehen werden (**3.** 5. 1.) auch hinreichend.

$\{\mathbf{3}; 1_2, 2\}$. Es muß sich um ein Nullstellenpaar einer Funktion $\mathfrak{G}'_\lambda$ handeln ($\{\mathbf{3}; 1_2\}$), von dem mindestens eine Stelle nach z^* fällt ($\{\mathbf{3}; 2\}$); letzteres trifft nur bei $\lambda_0 = 0$ zu, und dann liegt die andere Nullstelle auf $\mathfrak{S}$. Aus der Forderung, daß das Paar eine Stelle auf $\mathfrak{M}$ bezeichne, folgt dann nach **1.** 3., daß z^* auf dem Rande von $\mathfrak{M}'$ liegen muß. Ist umgekehrt dieses der Fall, so liegt diejenige Stelle, die z^* zu einem Element von $\mathfrak{M}$ ergänzt, auf $\mathfrak{S}$, ist also wirkliche

Nullstelle einer Funktion $\mathfrak{G}'_\lambda$ mit $\lambda_0 = 0$, deren andre „Nullstelle“ z^* ist. Dieser Grenzfall tritt also dann und nur dann auf, wenn z^* auf dem Rande von $\mathfrak{M}'$ liegt.

$\{\mathbf{3}; 1_{1,2}, 2\}$. $z_1^{(0)}$ und $z_2^{(0)}$ fallen beide zusammen nach $z^* \in \mathfrak{S}$; eine Stelle von $\mathfrak{M}$ kann dabei nach **1.** 3. nur vorliegen, wenn es sich um die Symmetriestelle des vorerst ausgeschlossenen Grenzfalls $\{\mathbf{1}; 1, 2\}$ handelt.

3. 5. 1. Wir fahren nun in der Untersuchung der Nullstellen der Funktionen $\mathfrak{G}'_\lambda(z)$ fort, von denen uns nur die im Innern von $\mathfrak{B}$ liegenden interessieren. Jede gebietsinnere Stelle $\zeta \neq z^*$ ist wirkliche Nullstelle einer passenden Funktion $\mathfrak{G}'_\lambda$, oder, damit gleichbedeutend, kritische Stelle einer Funktion $\mathfrak{g}_\lambda$. Denn $\mathfrak{g}_{\lambda x}(\zeta) = 0$, $\mathfrak{g}_{\lambda y}(\zeta) = 0$ sind zwei lineare homogene Gleichungen für die drei Unbekannten $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$, die stets eine von $0, 0, 0$ verschiedene Lösung zulassen; $\zeta = z^*$ ist Nullstelle in dem gemäß **3.** 3 erweiterten Wortsinn für jedes $\mathfrak{G}'_\lambda$ mit $\lambda_0 = 0$. Daher ist jede Symmetriestelle von $\mathfrak{M}$ eine unter $\{\mathbf{3}; 1_1\}$ fallende stationäre Stelle.

3. 5. 2. Für die Untersuchung des Falles $\{\mathbf{3}; 1_2\}$ müssen wir diejenigen λ aufsuchen, zu denen Funktionen $\mathfrak{G}'_\lambda$ mit einem Paar gebietsinnerer Nullstellen gehören. Die Menge dieser λ heiße $\mathfrak{D}$, ihre Komplementärmenge $\mathfrak{C}$; diese fassen wir zuerst ins Auge. Wenn $\lambda \in \mathfrak{C}$, so liegt also mindestens eine Nullstelle von $\mathfrak{G}'_\lambda$ auf C. Die Forderung, daß ein vorgegebener Randpunkt ζ kritische Stelle einer Funktion $\mathfrak{g}_\lambda$ sei, führt nur auf eine lineare Gleichung für λ, nämlich auf

$$\mathfrak{g}_{\lambda n}(\zeta) = \lambda_0 g_n(\zeta) + \lambda_1 \gamma_{1n}(\zeta) + \lambda_2 \gamma_{2n}(\zeta) = 0 \tag{3.2}$$

(wo der Index n die Ableitung nach der Randnormalen bedeutet), da ja in jedem Randpunkt $\mathfrak{g}_{\lambda s}(\zeta) = 0$ gilt. Wir deuten nun λ als einen Punkt einer projektiven Ebene (hier kommt der Vorteil der homogenen Verbindungen (3. 1) zur Geltung). Dann wird durch (3. 2) eine Gerade dargestellt. Jedem Randpunkt ζ ist also eine Gerade $L(\zeta)$ der λ-Ebene zugeordnet, derart, daß ζ Nullstelle aller derjenigen $\mathfrak{G}'_\lambda$ ist, deren λ auf dieser Geraden liegt. $\mathfrak{C}$ ist die Menge der von den Geraden $L(\zeta)$ überdeckten λ, wenn ζ C durchläuft; mit $\mathfrak{C}_\iota$ bezeichnen wir die Menge, die von den zu C_ι gehörigen Geraden überdeckt wird.

Da $\mathfrak{G}'_\lambda$ nach dem schon wiederholt herangezogenen Hilfssatz höchstens vier Nullstellen auf dem Rande, auf jeder Komponente desselben aber eine gerade Anzahl hat, so können für ein bestimmtes λ nicht auf allen drei Randkomponenten solche liegen, d. h. kein Punkt der λ-Ebene gehört allen drei $\mathfrak{C}_\iota$ zugleich an.

Durch die Schnittpunkte der $L(\zeta_\iota)$ mit einer beliebigen Geraden L wird, wenn ζ_ι C_ι durchläuft, dieses eindeutig und im Sinne der projektiven Geometrie stetig auf L abgebildet; daher ist der Durchschnitt

von L mit $\mathfrak{C}_\iota$ zusammenhängend. Wählt man für L die Verbindungsgerade zweier Punkte aus $\mathfrak{C}_\iota$, so sieht man, daß dieses projektiv konvex ist, d. h., daß mindestens eine der beiden Verbindungsstrecken irgend zweier seiner Punkte ganz zu $\mathfrak{C}_\iota$ gehört.

Es seien die Punkte $\xi_\iota \in C_\iota$ $(\iota = 0, 1, 2)$ beliebig gewählt; durch die drei Geraden $L(\xi_\iota)$ wird die λ-Ebene in vier Dreiecke $\mathfrak{D}_0'$, $\mathfrak{D}_1'$, $\mathfrak{D}_2'$, $\mathfrak{D}_3'$ zerlegt. Keines dieser Gebiete kann von den drei $\mathfrak{C}_\iota$ zusammen völlig überdeckt werden, da es sonst einen Punkt gäbe, der allen drei $\mathfrak{C}_\iota$ zugleich angehört. Also besteht $\mathfrak{D}$ aus vier Teilgebieten $\mathfrak{D}_\iota$ $(\iota = 0, 1, 2, 3)$, deren jedes der Durchschnitt von Dreiecken $\mathfrak{D}_\iota'$ bei veränderlichen ξ_ι, und also projektiv konvex ist.

Die wesentliche Eigenschaft der $\mathfrak{D}_\iota$ ist nun diese: Jedes wird von drei Bogen berandet, je einem zu $\mathfrak{C}_0$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ gehörigen. Andernfalls gäbe es am Rande eines der $\mathfrak{D}_\iota$, etwa dem von $\mathfrak{D}_0$, zwei Punkte, die zu denselben zwei $\mathfrak{C}_\iota$, sagen wir zu $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{C}_1$, gehören. Von ihren Verbindungsstrecken läge eine in $\mathfrak{D}_0$, die andere zugleich in $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{C}_1$; diese müßte aber außerdem $\mathfrak{C}_2$ treffen, im Widerspruch zu einer oben gemachten Feststellung.

3. 6. Zu jedem inneren Punkt λ von $\mathfrak{D}$ gehört eine Funktion $\mathfrak{G}_\lambda'$ mit zwei dem Inneren von $\mathfrak{B}$ angehörigen Nullstellen $\zeta_\lambda^{(1)}$, $\zeta_\lambda^{(2)}$, die auch zusammenfallen können. Zur Auffindung der unter $\{3; 1_2\}$ fallenden stationären Stellen haben wir unter diesen Nullstellenpaaren diejenigen herauszusuchen, die Stellen auf $\mathfrak{M}$ bezeichnen, also diejenigen, für die der Vektor

$$\tau = \gamma(\zeta_\lambda^{(1)}) + \gamma(\zeta_\lambda^{(2)}) \tag{3. 3.}$$

in der Periodenebene den durch die Periodenbedingungen (1. 1) vorgeschriebenen Punkt

$$\alpha_0^{(2)} = \alpha - \gamma(z_0)$$

bezeichnet. Durch (3. 3) wird eine Abbildung von $\mathfrak{D}$ in die Periodenebene vermittelt:

$$\tau = \gamma(\zeta_\lambda^{(1)}) + \gamma(\zeta_\lambda^{(2)}) = \vartheta(\lambda), \quad \lambda \in \mathfrak{D}; \qquad \vartheta(\lambda) = (\vartheta_1(\lambda), \vartheta_2(\lambda)), \tag{3. 4}$$

und die Urbilder von $\alpha_0^{(2)}$ bei dieser Abbildung sind diejenigen λ, die auf stationäre Stellen $\{3; 1_2\}$ auf $\mathfrak{M}$ führen; wir haben also die Anzahl dieser Urbilder zu bestimmen.

3. 6. 1. Wir beweisen zuerst, daß die Abbildung (3. 4) im kleinen umkehrbar eindeutig ist, indem wir zeigen, daß die Funktionalmatrix

$$\Theta = \begin{pmatrix} \vartheta_{1\lambda_0} & \vartheta_{1\lambda_1} & \vartheta_{1\lambda_2} \\ \vartheta_{2\lambda_0} & \vartheta_{2\lambda_1} & \vartheta_{2\lambda_2} \end{pmatrix} \tag{3. 5}$$

vom Range 2 ist. Zu diesem Zwecke leiten wir zunächst eine analytische Darstellung unserer Abbildung her.

Es ist

$$\vartheta_\iota(\lambda) = \mathfrak{Re}\,\Theta_\iota(\lambda) \text{ mit } \Theta_\iota(\lambda) = \Gamma_\iota(\zeta_\lambda^{(1)}) + \Gamma_\iota(\zeta_\lambda^{(2)}) \qquad (\iota = 1, 2).$$

Diese Summe der Werte der Funktion Γ_i in den Nullstellen $\mathfrak{G}'_\lambda$ läßt sich als ein über C erstrecktes Residuenintegral darstellen. Wegen der Vieldeutigkeit von Γ_i in $\mathfrak{B}$ müssen wir durch zwei passende Schlitze B_1 und B_2 erst ein einfach zusammenhängendes Gebiet herstellen. B_1 soll etwa C_1, B_2 C_2 mit C_0 verbinden, und zwar unter Vermeidung der Punkte z^*, $\zeta_\lambda^{(1)}$ und $\zeta_\lambda^{(2)}$, wobei wir uns zunächst ein bestimmtes λ gewählt denken. Den Rand des so entstandenen Gebietes $\mathfrak{B}'$ nennen wir C'. Nun betrachten wir das Integral:

$$I_i = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \Gamma_i(z)\frac{\mathfrak{G}''_\lambda(z)}{\mathfrak{G}'_\lambda(z)}\,dz = \Gamma_i(\zeta_\lambda^{(1)}) + \Gamma_i(\zeta_\lambda^{(2)}) - \Gamma_i(z^*).$$

Die angegebene Auswertung bleibt auch für $\lambda_0 = 0$ richtig, da dann eine der Stellen $\zeta_\lambda^{(i)}$ nach z^* fällt. Wir formen I_i durch partielle Integration um:

$$(3.6)\qquad I_i = \left[\frac{1}{2\pi i}\Gamma_i(z)\log\mathfrak{G}'_\lambda(z)\right]_{C'} - \frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\Gamma'_i(z)\log\mathfrak{G}'_\lambda(z)\,dz.$$

Wir betrachten nun λ als veränderlich, fassen aber zunächst nur solche Änderungen ins Auge, bei denen $\zeta_\lambda^{(1)}$ und $\zeta_\lambda^{(2)}$ nicht allein im Innern von $\mathfrak{B}$ bleiben, sondern auch die Schlitze B_1 und B_2 nicht überschreiten. Beim Umlauf um C' kehrt Γ_i zum Ausgangswert zurück; dasselbe gilt für $\mathfrak{G}'_\lambda$; die Änderung von $\log\mathfrak{G}'_\lambda$ ist also ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$, das stetig, also gar nicht, von λ abhängt, und dasselbe gilt daher von dem ausintegrierten Bestandteil in (3.6). Ferner stimmen die beiden Werte von Γ'_i an zwei gegenüberliegenden Punkten der beiden Ufer eines Schlitzes B_1 oder B_2 überein, während sich die von $\log\mathfrak{G}'_\lambda$ um eine von λ unabhängige Größe unterscheiden, sodaß also die Beiträge, die die beiden Schlitze zu dem Integral in (3.6) liefern, ebenfalls von λ unabhängig sind. Die übrigen Bestandteile des Integrals unterscheiden sich von dem über C erstreckten wieder um einen von λ unabhängigen Wert. Indem wir nun alle von λ unabhängigen Teile zusammenfassend mit A' bezeichnen, finden wir schließlich:

$$(3.7)\qquad \Gamma_i(\zeta_\lambda^{(1)}) + \Gamma_i(\zeta_\lambda^{(2)}) = A' - \frac{1}{2\pi i}\int_C \Gamma'_i(z)\log\mathfrak{G}'_\lambda(z)\,dz,$$

wobei die zweite Einschränkung über die Veränderlichkeit von λ nachträglich aufgehoben werden kann, da es sich ja um analytische Abhängigkeiten handelt. Durch weitere Umformungen des Integrals finden wir, indem wir mit A eine neue von λ unabhängige Größe bezeichnen:

$$\Gamma_i(\zeta_\lambda^{(1)}) + \Gamma_i(\zeta_\lambda^{(2)}) = A' - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\partial\Gamma_i}{\partial s}\log\left(\frac{\partial\mathfrak{G}_\lambda}{\partial s} : \frac{\partial z}{\partial s}\right)ds$$

$$= A_i - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\partial\Gamma_i}{\partial s}\log\frac{\partial\mathfrak{G}_\lambda}{\partial s}\,ds.$$

Auf C sind aber $\frac{\partial \Gamma_\iota}{\partial s} = -i \frac{\partial \gamma_\iota}{\partial n}$ und $\frac{\partial \mathfrak{G}_\lambda}{\partial s} = -i \frac{\partial \mathfrak{g}_\lambda}{\partial n}$ rein imaginär, $\log \frac{\partial \mathfrak{G}_\lambda}{\partial s}$ also, abgesehen von einer von λ unabhängigen Größe, rein reell, und dasselbe gilt von dem Integralglied in der letzten Gleichung. Daher kann die Abbildung $\tau_\iota = \vartheta_\iota(\lambda)$ $(\iota = 1, 2)$ in der folgenden Form dargestellt werden:

$$\tau_\iota = \vartheta_\iota(\lambda) = a_\iota - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\partial \Gamma_\iota}{\partial s} \log \frac{\partial \mathfrak{G}_\lambda}{\partial s} \, ds$$

mit von λ unabhängigen a_ι. Daraus findet man z. B. für $\vartheta_{\iota \lambda_0}$, eines der Elemente der zu untersuchenden Matrix (3.5):

$$\vartheta_{\iota \lambda_0} = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\partial \Gamma_\iota}{\partial s} \frac{\frac{\partial G}{\partial s}}{\frac{\partial \mathfrak{G}_\lambda}{\partial s}} \, ds = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Gamma_\iota' G'}{\mathfrak{G}_\lambda'} \, dz,$$

und für die Matrix Θ selbst:

$$(3.8) \qquad -2\pi i \Theta = \begin{pmatrix} \int_C \frac{\Gamma_1' G'}{\mathfrak{G}_\lambda'} dz & \int_C \frac{\Gamma_1'^2}{\mathfrak{G}_\lambda'} dz & \int_C \frac{\Gamma_1' \Gamma_2'}{\mathfrak{G}_\lambda'} dz \\ \int_C \frac{\Gamma_2' G'}{\mathfrak{G}_\lambda'} dz & \int_C \frac{\Gamma_1' \Gamma_2'}{\mathfrak{G}_\lambda'} dz & \int_C \frac{\Gamma_2'^2}{\mathfrak{G}_\lambda'} dz \end{pmatrix}.$$

Wäre ihr Rang kleiner als 2, so gäbe es eine lineare Verbindung ihrer beiden Zeilen mit nicht zugleich verschwindenden reellen Koeffizienten, deren drei Glieder verschwinden, also eine Funktion

$$\Gamma' = \mu_1 \Gamma_1' + \mu_2 \Gamma_2' \quad \text{mit} \quad (\mu_1, \mu_2) \neq (0, 0),$$

für die gilt:

$$(3.9) \qquad \int_C \frac{\Gamma' G'}{\mathfrak{G}_\lambda'} dz = \int_C \frac{\Gamma' \Gamma_1'}{\mathfrak{G}_\lambda'} dz = \int_C \frac{\Gamma' \Gamma_2'}{\mathfrak{G}_\lambda'} dz = 0.$$

Für die weitere Untersuchung sind nun vier Fälle zu unterscheiden:

a) $\lambda_0 \neq 0$, $\zeta_\lambda^{(1)} \neq \zeta_\lambda^{(2)}$; b) $\lambda_0 \neq 0$, $\zeta_\lambda^{(1)} = \zeta_\lambda^{(2)}$;
c) $\lambda_0 = 0$, $\zeta_\lambda^{(1)} \neq \zeta_\lambda^{(2)} = z^*$; d) $\lambda_0 = 0$, $\zeta_\lambda^{(1)} = \zeta_\lambda^{(2)} = z^*$.

a) Auswertung der beiden letzten Integrale ergibt:

$$\frac{\Gamma' \Gamma_\iota'}{\mathfrak{G}_\lambda''}(\zeta_\lambda^{(1)}) + \frac{\Gamma' \Gamma_\iota'}{\mathfrak{G}_\lambda''}(\zeta_\lambda^{(2)}) = 0 \qquad (\iota = 1, 2).$$

Dies ist ein lineares homogenes Gleichungssystem für $\Gamma'(\zeta_\lambda^{(1)})$ und $\Gamma'(\zeta_\lambda^{(2)})$. Da Γ' nur eine Nullstelle hat, so müßte seine Determinante verschwinden, es müßte also gelten:

$$\frac{\Gamma_2'}{\Gamma_1'}(\zeta_\lambda^{(1)}) = \frac{\Gamma_2'}{\Gamma_1'}(\zeta_\lambda^{(2)}),$$

und das widerspricht der in **1.2.** festgestellten Schlichtheit der Funktion $\Psi = \frac{\Gamma_2'}{\Gamma_1'}$.

b) Ebenso wie unter a) erhält man:

$$\frac{\Gamma' \Gamma_\iota''}{\mathfrak{G}_\lambda'''}(\xi_\lambda^{(1)}) + \frac{\Gamma'' \Gamma_\iota'}{\mathfrak{G}_\lambda'''}(\xi_\lambda^{(1)}) = 0 \qquad (\iota = 1, 2).$$

Da $\xi_\lambda^{(1)}$ nicht doppelte Nullstelle von Γ' sein kann, so müßte die Determinante dieses Gleichungssystems für $\Gamma'(\xi_\lambda^{(1)})$, $\Gamma''(\xi_\lambda^{(1)})$ verschwinden. Bei $\Gamma_1'(\xi_\lambda^{(1)}) \neq 0$ würde daraus folgen:

$$\frac{\Gamma_1' \Gamma_2'' - \Gamma_1'' \Gamma_2'}{\Gamma_1'^2}(\xi_\lambda^{(1)}) = \left(\frac{\Gamma_2'}{\Gamma_1'}\right)'(\xi_\lambda^{(1)}) = 0,$$

im Widerspruch mit der Schlichtheit von Ψ. Bei $\Gamma_1'(\xi_\lambda^{(1)}) = 0$ aber würde entweder $\Gamma_1''(\xi_\lambda^{(1)}) = 0$ oder $\Gamma_2''(\xi_\lambda^{(1)}) = 0$ folgen, d. h. $\xi_\lambda^{(1)}$ wäre entweder doppelte Nullstelle von Γ_1' oder zugleich Nullstelle von Γ_1' und Γ_2', was beides unmöglich ist.

c) Man erhielte durch Auswerten der drei Integrale (3.9):

$$\frac{\Gamma' G'}{\mathfrak{G}_\lambda''}(\xi_\lambda^{(1)}) - \frac{\Gamma'}{\mathfrak{G}_\lambda'}(z^*) = 0, \quad \frac{\Gamma' \Gamma_\iota'}{\mathfrak{G}_\lambda''}(\xi_\lambda^{(1)}) = 0 \qquad (\iota = 1, 2).$$

Da nicht zugleich Γ_1' und Γ_2' in $\xi_\lambda^{(1)}$ verschwinden können, so würde aus den beiden letzten Gleichungen $\Gamma'(\xi_\lambda^{(1)}) = 0$, und dann aus der ersten $\Gamma'(z^*) = 0$ folgen, Γ' hätte also zwei Nullstellen.

d) Man bekäme:

$$-\frac{\Gamma'''(z^*)}{\mathfrak{G}_\lambda''(z^*)} + \frac{c\,\Gamma'(z^*)}{\mathfrak{G}_\lambda''(z^*)} = 0, \quad \frac{\Gamma' \Gamma_\iota'}{\mathfrak{G}_\lambda''}(z^*) = 0 \qquad (\iota = 1, 2),$$

wo c eine gewisse Konstante bezeichnet, woraus $\Gamma'(z^*) = \Gamma''(z^*) = 0$ folgen würde.

3.6.2. Um unsere Abbildung (3.4) im großen zu überblicken, untersuchen wir die Bilder der Ränder der $\mathfrak{D}_\iota$. Wenn λ aus dem Innern von $\mathfrak{D}_\iota$ auf den zu $\mathfrak{C}_0$ gehörigen Randbogen $\mathfrak{C}_{0\iota}$ tritt, so tritt mindestens eine der beiden Nullstellen von $\mathfrak{G}_\lambda'$ aus dem Innern von $\mathfrak{B}$ auf die Randkomponente C_0. Dort ist $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, während in der andern Nullstelle gilt: $\gamma_1 \geqq 0$, $\gamma_2 \geqq 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 = 2\pi - \gamma_0 \leqq 2\pi$. Liegt ferner λ auf dem zu $\mathfrak{C}_1$ gehörigen Endpunkt von $\mathfrak{C}_{0\iota}$, so gilt: $\xi_\lambda^{(1)} \in C_0$, $\xi_\lambda^{(2)} \in C_1$ oder umgekehrt, also:

$$\tau_1 = \gamma_1(\xi_\lambda^{(1)}) + \gamma_1(\xi_\lambda^{(2)}) = 2\pi, \quad \tau_2 = \gamma_2(\xi_\lambda^{(1)}) + \gamma_2(\xi_\lambda^{(2)}) = 0.$$

Durch weitere entsprechende Überlegungen findet man die in der folgenden Tabelle niedergelegten Zuordnungen (vgl. Fig. 4). Das Bild des Randes von $\mathfrak{D}_\iota$ hat also um jeden Punkt des Kurvendreiecks $\Delta^{(0)}$, in dessen Innerem der vorgeschriebene Bildpunkt $\alpha_0^{(2)}$ liegen muß (vgl. **1.3.**), die Umlaufszahl ± 1. Daraus folgt zusammen mit dem Ergebnis von **3.6.1.**, daß jeder Punkt von $\Delta^{(0)}$, insbesondere also $\alpha_0^{(2)}$, von dem Bilde von $\mathfrak{D}_\iota$ genau einmal bedeckt wird. Zu jedem $\mathfrak{D}_\iota$ gehören also im allgemeinen zwei stationäre Stellen, nämlich, wenn $\xi_\lambda^{(1)}$ und $\xi_\lambda^{(2)}$ die Nullstellen der Funktion $\mathfrak{G}_\lambda'$ sind, deren λ das in $\mathfrak{D}_\iota$ liegende Ur-

bild von $\alpha_0^{(2)}$ ist: $z_1 = \zeta_\lambda^{(1)}$, $z_2 = \zeta_\lambda^{(2)}$; $z_1 = \zeta_\lambda^{(2)}$, $z_2 = \zeta_\lambda^{(1)}$. Eine Ausnahme liegt vor, wenn $\zeta_\lambda^{(1)} = \zeta_\lambda^{(2)}$ ist. Zu verschiedenen $\mathfrak{D}_\iota$ gehören

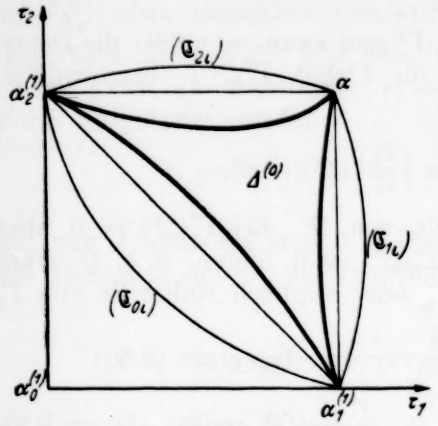

Fig. 4.

	τ_1	τ_2	$\tau_1 + \tau_2$
$\lambda \in \mathfrak{C}_{0\iota}$	$\geqq 0$	$\geqq 0$	$\leqq 2\pi$
$(\mathfrak{C}_{0\iota}, \mathfrak{C}_{1\iota})$	2π	0	
$\mathfrak{C}_{1\iota}$	$\geqq 2\pi$	$[0, 2\pi]$	
$(\mathfrak{C}_{1\iota}, \mathfrak{C}_{2\iota})$	2π	2π	
$\mathfrak{C}_{2\iota}$	$[0, 2\pi]$	$\geqq 2\pi$	
$(\mathfrak{C}_{2\iota}, \mathfrak{C}_{0\iota})$	0	2π	

verschiedene stationäre Stellen. Sind nämlich allgemein λ' und λ'' zwei verschiedene Punkte der λ-Ebene, so sind die zu $\mathfrak{G}'_{\lambda'}$ und $\mathfrak{G}'_{\lambda''}$ gehörigen Nullstellenpaare verschieden, da sonst zu jedem λ auf der Verbindungsgeraden von λ' und λ'' dasselbe Nullstellenpaar gehören würde; das ist nicht möglich, da diese Gerade jedes der $\mathfrak{C}_\iota$ trifft, eine der zugehörigen Nullstellen also auf jedes der C_ι zu liegen kommt.

3. 7. 1. In der KRONECKERschen Formel ist jeder Sattelpunkt mit seiner Vielfachheit zu zählen. Daher müssen wir diese jeweils feststellen, also nach **2.** 2. 2. vor allen Dingen die Frage klären, welches in der Entwicklung von $\mathfrak{g}_\lambda(\mathfrak{z})$ nach Ortsparametern auf $\mathfrak{M}$ der Rang der quadratischen Form der Glieder zweiter Ordnung ist.

$\mathfrak{z}^{(0)} = (z_1^{(0)}, z_2^{(0)})$ sei eine stationäre Stelle der Art $\{\mathbf{3}.\mathbf{1}_2\}$ mit $z_1^{(0)} \neq z_2^{(0)}$. Es ist für die Rechnung bequemer, ihre vierdimensionale Umgebung, anstatt durch reelle Parameter, etwa Real- und Imaginärteil von $z_1 - z_1^{(0)}$ und $z_2 - z_2^{(0)}$, durch diese beiden komplexen Größen und ihre Konjugierten zu beschreiben, die dabei wie vier unabhängige Veränderliche zu behandeln sind[7]). Es ist

[7]) Die Einführung konjugiert komplexer an Stelle reeller Parameter und ihre Behandlung als unabhängige Veränderliche wird durch folgende Überlegung gerechtfertigt: $\mathfrak{g}_\lambda(\mathfrak{z})$, $\gamma_1(\mathfrak{z})$, $\gamma_2(\mathfrak{z})$ sind analytische Funktionen der vier reellen Veränderlichen t_ι $(\iota = 1, 2, 3, 4)$ in der Umgebung von $\mathfrak{z}^{(0)}$, also auch, vermöge der Potenzreihenentwicklung, für komplexe Werte derselben erklärt. Für die Berechnung des Ranges der Matrix (2. 7) macht es keinen Unterschied, ob für die t_ι nur eine reelle oder eine komplexe Umgebung von $\mathfrak{z}^{(0)}$ zugelassen wird. Durch eine komplexe Substitution mit nicht verschwindender Determinante können nun neue komplexe voneinander unabhängige Veränderliche eingeführt werden; so insbesondere: $u_1 = t_1 + it_2$; $u_2 = t_1 - it_2$, $u_3 = t_3 + it_4$, $u_4 = t_3 - it_4$. Für reelle Werte der t_ι ist $u_2 = \bar{u}_1$, $u_4 = \bar{u}_3$.

$$2\,\mathfrak{g}_\lambda(\mathfrak{z}) = \mathfrak{G}_\lambda(z_1) + \overline{\mathfrak{G}_\lambda(z_1)} + \mathfrak{G}_\lambda(z_2) + \overline{\mathfrak{G}_\lambda(z_2)}$$
$$2\,\gamma_\iota(\mathfrak{z}) = \Gamma_\iota(z_1) + \overline{\Gamma_\iota(z_1)} + \Gamma_\iota(z_2) + \overline{\Gamma_\iota(z_2)} \qquad (\iota = 1,2),$$

und für die Matrix $\mathfrak{p}_\lambda$ aus **2.2** erhält man:

$$2\,\mathfrak{p}_\lambda = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}''_\lambda(z_1^{(0)}) & & & \\ & \overline{\mathfrak{G}''_\lambda(z_1^{(0)})} & & \\ & & \mathfrak{G}''_\lambda(z_2^{(0)}) & \\ & & & \overline{\mathfrak{G}''_\lambda(z_2^{(0)})} \end{pmatrix},$$

wo außerhalb der Hauptdiagonale lauter Nullen stehen. Sie ist, wie dort vorausgesetzt, vom Range 4, da wegen $z_1^{(0)} \neq z_2^{(0)}$ diese beiden Stellen einfache Nullstellen von $\mathfrak{G}'_\lambda$ sind. Ferner ist

$$2\,\mathfrak{u}^{(\iota)} = (\Gamma'_\iota(z_1^{(0)}),\ \overline{\Gamma'_\iota(z_1^{(0)})},\ \Gamma'_\iota(z_2^{(0)}),\ \overline{\Gamma'_\iota(z_2^{(0)})}),$$

und die Matrix (2.7), auf deren Rang es schließlich ankommt, ist die mit den Gliedern:

$$\frac{1}{8}\,\mathfrak{Re}\left(\frac{\Gamma'_\iota\Gamma'_\varkappa}{\mathfrak{G}''_\lambda}(z_1^{(0)}) + \frac{\Gamma'_\iota\Gamma'_\varkappa}{\mathfrak{G}''_\lambda}(z_2^{(0)})\right) \qquad (\iota, \varkappa = 1,2).$$

Die Größen, deren Realteile hier zu nehmen sind, stimmen mit den durch $-2\pi i$ dividierten Integralen in den beiden letzten Spalten der Matrix (3.8) überein, von denen wir dort gesehen haben, daß sie selbst reell sind und bei $\lambda_0 \neq 0$ eine Matrix vom Range 2 bilden (Fall a) der dortigen Unterscheidung). Der Fall $\lambda_0 = 0$ führt aber, wie in **3.4.** gezeigt, auf ein absolutes Minimum. Damit ist gezeigt, daß die nicht in einen Symmetriepunkt von $\mathfrak{M}$ fallenden Sattelpunkte alle einfach zu zählen sind.

3.7.2. Wir zeigen schließlich, daß ein Symmetriepunkt, der ja stets eine stationäre Stelle für $\Phi(\mathfrak{z})$ ist (vgl. **3.5.1.**), von gewissen Ausnahmen möglicherweise abgesehen, immer ein einfacher Sattelpunkt ist. Es sei $\mathfrak{z}^{(0)} = (z^{(0)}, z^{(0)})$ eine Symmetriestelle von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{z} = (z_1, z_2)$ variiere in ihrer Umgebung auf $\mathfrak{M}$. Setzen wir

$$z_1 - z^{(0)} = \delta z_1, \quad z_2 - z^{(0)} = \delta z_2,$$

so haben wir die quadratische Form

$$\mathfrak{G}''_\lambda(z^{(0)})\,(\delta z_1^2 + \delta z_2^2) + \overline{\mathfrak{G}''_\lambda(z^{(0)})}\,(\overline{\delta z_1^2} + \overline{\delta z_2^2}) \tag{3.10}$$

zu untersuchen, wobei $\delta z_1, \delta z_2, \overline{\delta z_1}, \overline{\delta z_2}$ durch die Forderung, daß (z_1, z_2) auf $\mathfrak{M}$ liege, an die Bedingungen geknüpft sind:

$$\Gamma'_\iota(z^{(0)})\,(\delta z_1 + \delta z_2) + \overline{\Gamma'_\iota(z^{(0)})}\,(\overline{\delta z_1} + \overline{\delta z_2}) = 0 \qquad (\iota = 1,2).$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems für $(\delta z_1 + \delta z_2)$ und $(\overline{\delta z_1} + \overline{\delta z_2})$ stimmt, von einem Zahlenfaktor abgesehen, mit (1.6) überein, verschwindet also dann und nur dann, wenn $z^{(0)}$ auf $\mathfrak{S}$ liegt, was, wie

wir aus **1.** 3 wissen, nur in dem Fall $\{\mathbf{1}; 1, 2\}$ zutrifft. Also ist $\delta z_1 = -\delta z_2$ und aus (3. 10) wird:

$$2\,(\mathfrak{G}_\lambda''(z^{(0)})\,\delta z_1^2 + \overline{\mathfrak{G}_\lambda''(z^{(0)})}\,\overline{\delta z_1^2}).$$

Wenn $\mathfrak{G}_\lambda''(z^{(0)})$ nicht verschwindet, also die stationäre Stelle nicht unter $\{\mathbf{3}; 1_{1,2}\}$ fällt, so ist diese quadratische Form vom Range 2 und indefinit, denn Definitheit würde wegen $\mathfrak{G}_\lambda'(z^{(0)}) = 0$ bedeuten, daß $\Re\mathfrak{e}\,\mathfrak{G}_\lambda(z)$ an der Stelle $z^{(0)}$ einen Extremwert hat. Also ist $(z^{(0)}, z^{(0)})$ ein Sattelpunkt, und zwar ein einfacher.

Als Ergebnis von **3.** 7. können wir somit feststellen: Sieht man von den unter $\{\mathbf{3}; 1_{1,2}\}$ fallenden stationären Stellen ab, so sind die Symmetriepunkte immer Sattelpunkte, und alle auftretenden Sattelpunkte sind einfach.

4. Abschluß des Beweises. Zu zeigen ist, daß $|F(z^*)|$ in $\mathfrak{K}_I'$ nur e i n absolutes Maximum hat, d. h., da eine Funktion aus $\mathfrak{K}_I'$ auf $\mathfrak{M}$ im allgemeinen zweimal vertreten ist (vgl. **1.** 3., Ende), daß $\Phi(\mathfrak{z})$ auf $\mathfrak{M}$ höchstens zwei absolute Maxima hat, und daß, wenn es wirklich zwei sind, diese nicht in Symmetriepunkten von $\mathfrak{M}$, sondern in Stellen auftreten, die durch Vertauschung von z_1 und z_2 auseinander hervorgehen und daher auf dieselbe Funktion aus $\mathfrak{K}_I'$ führen. Wir werden sogar zeigen, daß das auch richtig ist, wenn wir von relativen statt von absoluten Maxima reden.

Sowohl für die Lage von z_0 als auch für die von z^* sind zwei Hauptfälle und je ein Grenzfall zu unterscheiden. Bezüglich z_0 ist das die schon in **1.** 3. getroffene Unterscheidung. Bezüglich z^* ist es die folgende:

$\{\mathbf{4}; 1\}$. z^* liegt außerhalb von $\mathfrak{M}'$.
$\{\mathbf{4}; 2\}$. z^* liegt im Innern von $\mathfrak{M}'$.
$\{\mathbf{4}; 1, 2\}$. z^* liegt auf dem Rande von $\mathfrak{M}'$.

Nur in den Fällen $\{\mathbf{4}; 2\}$ und $\{\mathbf{4}; 1, 2\}$ können unter $\{\mathbf{3}; 2\}$ fallende stationäre Stellen auftreten, die bei $\{\mathbf{4}; 1, 2\}$ zugleich unter $\{\mathbf{3}; 1_2\}$ fallen (vgl. **3.** 4.).

4. 1. Aus der Betrachtung ausgeschlossen werden können, wie wir jetzt zeigen wollen, sowohl die beiden eben erwähnten Grenzfälle, wie auch solche Systeme z_0, z^*, für die stationäre Stellen vorkommen, die den in **3.** 4 aufgezählten Grenzfällen angehören. Die durch alle andern Systeme z_0, z^* gekennzeichneten Fälle sollen kurz Hauptfälle heißen. $\{\mathbf{3}; 1_2, 2\}$ ist schon mit $\{\mathbf{4}; 1, 2\}$, $\{\mathbf{3}; 1_{1,2}, 2\}$ mit $\{\mathbf{1}; 1, 2\}$ ausgeschlossen.

Angenommen nun, für irgend ein bestimmtes System z_0, z^*, sagen wir $z^{(0)}, z^{*(0)}$, sei die eingangs von **4.** ausgesprochene verschärfte Behauptung falsch, es habe also $\Phi(\mathfrak{z}; z^{*(0)})$ auf $\mathfrak{M}(z_0^{(0)})$ mehr als zwei relative Maxima oder zwei relative Maxima in Symmetriestellen. Es sei ferner z_0, z^* ein beliebiges, zum vorigen hinreichend nahe benachbartes System; dann wäre auch für dieses die Behauptung falsch, wie

wir mit Hilfe von **2.** 3. schließen können. Denn im einen Falle gäbe es auch auf $\mathfrak{M}(z_0)$ mehr als zwei relative Maxima; im andern Fall hätte $\mathfrak{M}(z_0)$ ebenso wie $\mathfrak{M}(z_n^{(0)})$ zwei Symmetriepunkte und es gäbe wieder mindestens zwei Maxima, und zwar lägen, wie aus dem ersten Teil des Hilfssatzes in **2.** 3. und aus der Stetigkeit der Abhängigkeit der Symmetriestellen von z_0 (vgl. **1.** 4.) folgt, mindestens eines derselben in beliebig enger Nachbarschaft der einen, ein anderes in beliebig enger Nachbarschaft der anderen Symmetriestelle von $\mathfrak{M}(z_0)$; diese beiden Maxima könnten also nicht zu Stellen von $\mathfrak{M}(z_0)$ gehören, die durch Vertauschung von z_1 und z_2 auseinander hervorgehen. Die Behauptung wird also umgekehrt für ein System $z_0^{(0)}, z^{*(0)}$ bewiesen sein, wenn sie es für eine Menge von Systemen z_0, z^* ist, für die $z_0^{(0)}, z^{*(0)}$ Häufungssystem ist. Ist daher der Beweis für die Hauptfälle erbracht, so ist er es auch für die Grenzfälle, wenn gezeigt ist, daß ein zu einem solchen gehöriges System z_0, z^* Häufungssystem der zu den Hauptfällen gehörigen ist.

Für $\{\mathbf{1}; 1, 2\}$ und $\{\mathbf{4}; 1, 2\}$ ist das selbstverständlich, ebenso für $\{\mathbf{3}; \mathbf{1}_1, 2\}$. Es bleibt also noch der Fall $\{\mathbf{3}; \mathbf{1}_{1,2}\}$ zu untersuchen. Wir zeigen, daß wir durch eine bloße beliebig kleine Abänderung von z_0, bei festem z^*, von diesem Fall zu einem Hauptfall gelangen können. $z_0^{(0)}$ und $z^{*(0)}$ seien so beschaffen, daß $\mathfrak{M}(z_0^{(0)})$ zwei Symmetriepunkte hat und in einem derselben $\mathfrak{z}^{(0)} = (z^{(0)}, z^{(0)})$ eine unter $\{\mathbf{3}; \mathbf{1}_{1,2}\}$ fallende stationäre Stelle vorliegt; $z^{(0)}$ ist also doppelte Nullstelle einer Funktion $\mathfrak{G}_\lambda'(z; z^{*(0)})$ bei passendem λ. Nun durchlaufe z_0' eine Vollumgebung von $z_0^{(0)}$; wir zeigen: a) Die zugehörige $\mathfrak{M}(z_0')$ besitzt jeweils gleichfalls zwei Symmetriepunkte, deren einer, $\mathfrak{z}' = (z', z')$, zu $\mathfrak{z}^{(0)}$ benachbart ist; und zwar durchläuft z' mindestens eine Halbumgebung von $z^{(0)}$. b) Die doppelten Nullstellen von $\mathfrak{G}_\lambda(z; z^{*(0)})$ bei veränderlichem λ erfüllen kein Gebiet, also insbesondere nicht die eben erwähnte Halbumgebung von $z^{(0)}$. Daher gibt es ein zu $z_0^{(0)}$ benachbartes z_0', derart, daß das z' der Symmetriestelle $\mathfrak{z}' = (z', z')$ von $\mathfrak{M}(z_0')$ nicht doppelte Nullstelle von $\mathfrak{G}_\lambda(z; z^{*(0)})$ ist. Zu dem System $z_0', z^{*(0)}$ gehört also ein Hauptfall. Die Richtigkeit von a) erkennt man so: Da $\mathfrak{M}(z_0^{(0)})$ zwei Symmetriepunkte hat, so ist $\mathcal{A}(z_0^{(0)})$ ein zusammenhängender Bereich, dessen Symmetriezentrum $\sigma^{(0)}$ in seinem Innern liegt, und $z^{(0)}$ ist eines der beiden Urbilder von $\tau = \sigma^{(0)}$ bei der Abbildung $\tau = \gamma(z) : \sigma^{(0)} = \gamma(z^{(0)})$. Durchläuft z_0 eine Vollumgebung von $z_0^{(0)}$, so durchläuft das Symmetriezentrum $\sigma = \frac{1}{2}(\alpha - \gamma(z_0))$ von $\mathcal{A}(z_0)$, mindestens eine Halbumgebung von $\sigma^{(0)}$, und das eine Urbild von σ ebenfalls mindestens eine Halbumgebung von $z^{(0)}$. — Zum Beweis von b) überlegen wir: Zu einem ζ gibt es ein λ, derart, daß ζ doppelte Nullstelle von $\mathfrak{G}_\lambda'(z; z^{*(0)})$ ist, dann und nur dann, wenn die beiden linearen homogenen Gleichungen für λ:

$$\lambda_0 G'(\zeta; z^{*(0)}) + \lambda_1 \Gamma_1'(\zeta) + \lambda_2 \Gamma_2'(\zeta) = 0$$
$$\lambda_0 G''(\zeta; z^{*(0)}) + \lambda_1 \Gamma_1''(\zeta) + \lambda_2 \Gamma_2''(\zeta) = 0$$

ein reelles Lösungssystem haben, d. h. wenn die drei zweireihigen Unterdeterminanten des Systems in reellen Verhältnissen stehen. Würde das für alle ζ eines Gebietes zutreffen, so müßten diese beiden Verhältnisse, als analytische Funktionen von ζ, deren Imaginärteil in diesem Gebiete konstant ist, überhaupt Konstanten sein, und das ist nicht möglich, da eine der Determinanten überall in $\mathfrak{B}$ regulär ist, während die beiden anderen in $z^{*(0)}$ einen Pol haben.

4. 2. Es bleibt also noch der Beweis für die Hauptfälle zu erbringen. Die KRONECKERsche Formel gibt uns den Wert $-m^{(0)}+m^{(1)}-m^{(2)}$, die Ergebnisse von **3.** gestatten, die Gesamtzahl $m^{(0)}+m^{(1)}+m^{(2)}$ der stationären Stellen anzugeben. Mit p_1' bezeichnen wir die Anzahl der unter $\{\mathbf{3};1_1\}$, mit p_1'' die Anzahl der unter $\{\mathbf{3};1_2\}$ und mit p_2 die Anzahl der unter $\{\mathbf{3};2\}$ fallenden. Da sich nach Ausscheiden der Grenzfälle diese drei Typen gegenseitig ausschließen, so ist

$$m^{(0)}+m^{(1)}+m^{(2)} = p_1'+p_1''+p_2,$$

und da ferner nach **3.** 7. in den Hauptfällen nur einfache Sattelpunkte vorkommen, so ist rechts jeweils nur die Anzahl der verschiedenen unter die einzelnen Typen fallenden Stellen abzuzählen.

p_1' ist die Anzahl der Symmetriestellen auf $\mathfrak{M}(z_0)$; p_1'' ist, da doppelte Nullstellen von $\mathfrak{G}_t'$ ausgeschlossen sind, nach **3.**6.2., gleich der doppelten Anzahl der Gebiete $\mathfrak{D}_\iota$, also gleich 8. p_2 ist, falls z^* außerhalb von $\mathfrak{M}'$ liegt, gleich 0; liegt z^* im Innern von $\mathfrak{M}'$, so gehören zu $z_1 = z^*$ zwei verschiedene z_2, ebenso zu $z_3 = z^*$ zwei verschiedene z_1; man erhält also in diesem Falle $p_2 = 4$.

In den vier Hauptfällen haben wir also folgende Gleichungen:

$\{\mathbf{1};1\}$, $\{\mathbf{4};1\}$:

$$-m^{(0)}+m^{(1)}-m^{(2)} = 2$$
$$m^{(0)}+m^{(1)}+m^{(2)} = 10$$

also
$$m^{(0)}+m^{(2)} = 4.$$

Da nach **3.** 7. 2. in einem Hauptfall ein Maximum oder Minimum nicht in einem Symmetriepunkt auftreten kann, so gibt es deren je mindestens 2, also nach der letzten Gleichung insbesondere genau 2 Maxima die zu derselben Funktion aus $\mathfrak{K}_t'$ gehören.

$\{\mathbf{1};1\}$, $\{\mathbf{4};2\}$:

$$-m^{(0)}+m^{(1)}-m^{(2)} = 2$$
$$m^{(0)}+m^{(1)}+m^{(2)} = 14$$

also
$$m^{(0)}+m^{(2)} = 6.$$

Hier ist $m^{(0)} \geqq 4$, da wir 4 absolute Minima haben, und $m^{(2)} \geqq 2$, also $m^{(2)} = 2$, und wir haben wieder 2 zu derselben Funktion gehörige Maxima.

$\{\mathbf{1};2\}$, $\{\mathbf{4};1\}$:

$$-m^{(0)}+m^{(1)}-m^{(2)}=0$$
$$m^{(0)}+m^{(1)}+m^{(2)}=8$$

also

$$m^{(0)}+m^{(2)}=4$$

und man schließt weiter wie im ersten Hauptfall.

$\{\mathbf{1};2\}$, $\{\mathbf{4};2\}$:

$$-m^{(0)}+m^{(1)}-m^{(2)}=0$$
$$m^{(0)}+m^{(1)}+m^{(2)}=12$$

also

$$m^{(0)}+m^{(2)}=6$$

und man schließt weiter, wie im zweiten Hauptfall.

(Eingegangen am 24. März 1947.)

Ein Beitrag zur Carathéodoryschen Definition der Ortsfunktionen in Booleschen Algebren.

Von

Demetrios A. Kappos in Erlangen.

Einleitung.

In Booleschen Algebren kann man Ortsfunktionen erklären, welche für den Fall, daß die Elemente (Somen) der Booleschen Algebra gewöhnliche Punktmengen bedeuten, den Punktfunktionen entsprechen. Carathéodory [1]), der zuerst solche Ortsfunktionen eingeführt hat, definiert sie folgendermaßen: Jedem von dem leeren Element o verschiedenen Element $a \subseteq a_0$ (a_0 ist ein Element der Booleschen Algebra, das als Definitionsbereich der Ortsfunktion vorausgesetzt wird) sei eine reelle Zahl $\alpha(a)$ (die untere Grenze) und eine reelle Zahl $\beta(a)$ (die obere Grenze der Funktion auf a) zugeordnet. Es soll gelten:

1. $\alpha(a) \leqq \beta(a)$, $\alpha(a) \geqq \alpha(b)$ und $\beta(a) \leqq \beta(b)$ für $a \subseteq b$.

2. Ist $\alpha(a_0) < \beta(a_0)$, so gibt es mindestens eine im Intervalle $\alpha(a_0) < \lambda < \beta(a_0)$ überall dicht liegende Folge von Zahlen λ_k, denen Elemente a_k eindeutig zugeordnet sind, so daß erstens immer $\beta(a_k) \leqq \lambda_k$ ist und zweitens für jedes Element b mit $b\,a_k = o$ immer $\alpha(\beta) \geqq \lambda_k$ ist. Carathéodory [2]) hat noch eine zweite Definition der beschränkten Ortsfunktionen gegeben durch Dedekindsche Schnitte, aus endlichwertigen (einfachen) Ortsfunktionen, d. h. Ortsfunktionen, deren Wertevorrat aus einer endlichen Anzahl verschiedener Werte besteht. Um aber allgemeine (unbeschränkte) Ortsfunktionen zu erklären, definiert er die Ortsfunktionen noch durch Somenskalen. Erklärt man jetzt für die so definierten Ortsfunktionen die obere und untere Grenze auf $a \subseteq a_0$, so kann man unter der Voraussetzung, daß die Algebra vollständig [3]) ist, folgendes beweisen: Dafür daß eine Elementenfunktion

---

[1]) Carathéodory: Sitzungsberichte Bay. Ak. München, Abt. Math.-Nat. 1938, S. 27–68.

[2]) Carathéodory: Math. Zeitschrift 46 (1940) S. 183—189 auch Abh. Math. Sem. Hamburg 14 (1941) S. 251—289. Ausführlich in seinem Buch: Reelle Funktionen Bd. II noch im Druck befindlich. Kurz CRF II.

[3]) Vollständig heißt eine Boolesche Algebra, wenn in ihr Vereinigungen von beliebig vielen (auch nicht abzählbar vielen) Elementen existieren. Siehe darüber Kappos. Math. Annalen 120 (1947) S. 43—74.

$\alpha(a)$ die untere Grenze einer Ortsfunktion f sei, ist notwendig und hinreichend, daß mindestens eine monoton wachsende Elementenfunktion $\beta(a)$ existiere, für welche die Bedingung gilt: $\alpha(a) = \inf_{b \subseteq a} \beta(b)$.

Eine entsprechende Eigenschaft charakterisiert auch die obere Grenze. Man soll also nach Bischof[4]) zu der ersten Carathéodoryschen Definition die Bedingung hinzufügen:

Es sei $\alpha(a) = \inf_{b \subseteq a} \beta(b), \quad \beta(a) = \sup_{b \subseteq a} \alpha(b).$

Die erste Carathéodorysche Definition der Ortsfunktionen hat den Vorteil, daß man sofort die Integrale in Booleschen Algebren nach Hahn[5]) definieren kann. Andrerseits kann man mit Hilfe der zweiten Definition den Integralbegriff genetisch nach Riesz[6]) erklären.

Wir werden im Folgenden die Ortsfunktionen durch Dedekindsche Schnitte aus einfachen Ortsfunktionen so erklären, daß man durch diese Schnitte die allgemeinsten Ortsfunktionen, auch unbeschränkte erhält. Das System der Carathéodoryschen einfachen Ortsfunktionen kann nämlich teilweise geordnet werden. Erklärt man dann Max (f, g) und Min (f, g) von zwei einfachen Ortsfunktionen als Vereinigung $f \cup g$ und Durchschnitt $f \cap g$, so wird die Menge aller einfachen Ortsfunktionen zu einem Verband. Erweitert man alsdann die Menge der einfachen Ortsfunktionen durch Adjunktion von Ortsfunktionen, deren Wertevorrat aus abzählbar unendlich vielen verschiedenen Werten besteht und läßt man auch die Werte $+\infty$ und $-\infty$ als Funktionswerte zu, so ist die neue Menge ein Verband mit Null und Einselement. In einem solchen Verband kann man nun die Dedekindschen Schnitte nach Mac Neille[7]) erklären und ihn zu einem vollständigen Verband erweitern. In einem solchen Verband hat man aber das Stetigkeitsaxiom zur Verfügung, dessen Gültigkeit zur Einführung des Limesbegriffes von Ortsfunktionen unentbehrlich ist und das Carathéodory[8]) mit Hilfe von Somenskalen für abzählbar viele Ortsfunktionen bewiesen hat, und zwar für beliebig viele Ortsfunktionen.

Zum Schluß zeigen wir, wie man zu der Menge der für eine Maßfunktion φ meßbaren endlichen Ortsfunktionen durch Fundamentalfolgen aus der Menge der endlichen einfachen Ortsfunktionen gelangen kann. Ist nämlich die Maßfunktion in dem vollkommenen

---

[4]) Bischof: Schriften des Math. Inst. Univ. Berlin Bd. 5 (1941) S. 237—262.

[5]) Hahn: Festschrift der 57. Vers. Deutscher Philologen und Schulmänner, Satzburg 1929 S. 193. Auch Carathéodory (Zit. 1).

[6]) Riesz, Fr. a) Math. Annalen 69 (1910) S. 449—497 besonders § 1. b) Acta Math. 42 (1917) S. 191—205. Auch Nikodym, Fund. Math. 15 (1930) S. 131—179.

[7]) Mac Neille, Trans. Am. Math. Soc. 42 (1937) S. 416—460 besonders § 11.

[8]) CRF II.

BOOLEschen Ring R_φ totaladditiv, reduziert und normal, so braucht man zur Definition der Integrale die nicht endlichen Ortsfunktionen nicht in Betracht zu ziehen; für sie wäre der Integralwert $+\infty$ oder $-\infty$ oder unbestimmt.

§ 1.

Einfache Ortsfunktionen.

Es sei R ein beliebiger vollständiger BOOLEscher Ring (Algebra)[9]. Als Definitionsbereich der Ortsfunktionen legen wir ein für alle Mal ein Element a von R zu Grunde, das nicht leer ist. Nun betrachten wir Zerlegungen:

$$a = a_1 + a_2 + \cdots = \sum a_i \tag{1}$$

von a in abzählbar viele paarweise fremde nicht leere Elemente a_i. Jedem Element a_i ordnen wir eine endliche oder unendliche Zahl α_i eindeutig zu; in Zeichen $a_i \to \alpha_i$. Durch diese Zuordnung ist auf a eine *einfache Ortsfunktion* erklärt; in Zeichen:

$$f = S(a_i \to \alpha_i). \tag{2}$$

Sind alle α_i endlich, so heißt f *endlich*; dies bedeutet aber nicht, daß die Menge der α_i, d. h. f, beschränkt ist.

Zwischen Ortsfunktionen führen wir eine *Gleichheit* ein: Entsprechen f und g derselben Zerlegung, so sind sie gleich, wenn sie identisch sind. Entsprechen f und g verschiedenen Zerlegungen z. B.

$$\begin{aligned} f &= S(a_i \to \alpha_i) \qquad a = \sum a_i \\ g &= S(b_j \to \beta_j) \qquad a = \sum b_j, \end{aligned} \tag{3}$$

so ist $f = g$, wenn

$$S^*(a_i b_j \to \alpha_i) = S^*(a_i b_j \to \beta_j) \tag{4}$$

stattfindet. Der Stern bedeutet, daß nur solche Kombinationen von i, j in der Darstellung (4) zu nehmen sind, für welche $a_i b_j \neq o$ ist.

Man erklärt durch:

$$\begin{aligned} f \pm g &= S^*(a_i b_j \to \alpha_i \pm \beta_j), \quad fg = S^*(a_i b_j \to \alpha_i \beta_j) \\ f : g &= S^*(a_i b_j \to \alpha_i : \beta_j) \end{aligned} \tag{5}$$

neue Ortsfunktionen, falls die Operationen der reellen Zahlen rechts einen Sinn haben[10]. Der Zerlegung $a = a$ entsprechen konstante

---

[9]) S. für diese Begriffe KAPPOS, Math. Annalen 120 (1947) S. 43—74, im Folgenden KCI.

[10]) Ist eine oder sind mehrere Operationen mit reellen Zahlen rechts nicht ausführbar, so kann man die Ortsfunktionen $f \pm g$ bzw. fg bzw. $f : g$, in welcher dies vorkommt, als Ortsfunktion betrachten, deren Definitionsbereich aber nicht

Ortsfunktionen $(a \to \alpha)$, $(a \to 0)$, $(a \to \infty)$ usw. Diese Ortsfunktionen bezeichnen wir mit $\alpha, 0, \infty$, usw. Wir definieren nun:

(6) *Es ist* $f \geqq 0$ *bzw.* $f > 0$, *wenn alle* $\alpha_i \geqq 0$ *bzw.* $\alpha_i > 0$ *für mindestens ein* i.

(7) *Es ist* $f \geqq g$ *bzw.* $f > g$, *wenn* $f - g \geqq 0$ *bzw.* $f - g > 0$ *ist.*

Hierbei soll die Differenz $+\infty - \infty$, falls sie vorkommt, als gleich Null angenommen werden.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{E}$ die Menge aller möglichen einfachen Ortsfunktionen auf a. Dann gilt offensichtlich:

(8) *Durch* (7) *ist die Menge* $\mathfrak{E}$ *teilweise geordnet.*

Wir definieren

(9) $f \cup g = S^*[a_i b_j \to \operatorname{Max}(\alpha_i, \beta_j)]$, $f \cap g = S^*(a_i b_j \to \operatorname{Min}(\alpha_i, \beta_j)]$.

Man kann leicht bestätigen, daß diese beiden Operationen die charakteristischen Eigenschaften der Vereinigung bzw. des Durchschnittes in der teilweise geordneten Menge $\mathfrak{E}$ besitzen und weil sie immer in $\mathfrak{E}$ ausführbar sind, so ist $\mathfrak{E}$ ein Verband[11]). Der Verband $\mathfrak{E}$ besitzt Null und Einselement, nämlich die konstanten Ortsfunktionen $-\infty$ und $+\infty$ und ist distributiv.

§ 2.

Dedekindsche Schnitte im System der Ortsfunktionen.

Nun kann man in $\mathfrak{E}$ Dedekindsche Schnitte erklären und dadurch die allgemeinsten Ortsfunktionen definieren:

Def. I. *Zwei Teilmengen* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *von* $\mathfrak{E}$ *bilden einen Dedekindschen Schnitt* $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ *in* $\mathfrak{E}$, *wenn folgende Bedingungen gelten*:

a) *Aus* $f \in \mathfrak{A}$ *und* $g \in \mathfrak{B}$ *folgt* $f \leqq g$.

b) *Aus* $f \leqq h$ *für jedes* $f \in \mathfrak{A}$ *folgt* $h \in \mathfrak{B}$.

c) *Aus* $y \leqq g$ *für jedes* $g \in \mathfrak{B}$ *folgt* $y \in \mathfrak{A}$.

Offenbar gehört $-\infty$ immer zu $\mathfrak{A}$ und $+\infty$ immer zu $\mathfrak{B}$. Es ist also ausgeschlossen, daß eine der Teilmengen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ leer ist.

---

mehr das Element a sei, sondern ein Teil von a, den man bekommt, nachdem man alle Elemente $a_i b_j$ von a wegnimmt, an denen die Operationen der reellen Zahlen keinen Sinn haben; ähnlich macht man es bei gewöhnlichen Punktfunktionen (s. Carathéodory, Reelle Funktionen I 1939 § 119). Man kann sogar hier die Darstellungen (5) beibehalten, nachdem man dem Stern die weitere Bedeutung gibt: S^* bedeutet, daß nur solche Kombinationen von i, j in den Darstellungen (5) zu nehmen sind, für welche $a_i b_j$ nicht leer ist und $\alpha_i \pm \beta_j$ bzw. $\alpha_i \beta_j$ bzw. $\alpha_i : \beta_j$ einen Sinn hat.

[11]) S. Hermes-Köthe; Theorie der Verbände, Enzyk. Math. Wiss. 2. Auf. (1939) I 1, 13, auch KCI § 1.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{S}$ die Menge aller möglichen DEDEKINDschen Schnitte in $\mathfrak{E}$ und definieren in $\mathfrak{S}$ die Relation $\leqq$:

Def. II. *Es ist* $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \leqq [\mathfrak{C}, \mathfrak{D}]$, *wenn* $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$ *ist.*

Dann folgt leicht:

(10) *Es ist* $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \leqq [\mathfrak{C}, \mathfrak{D}]$, *dann und nur dann, wenn* $\mathfrak{D} \prec \mathfrak{B}$ *ist.*

Dann gelten aber:

(11) *Es ist* $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \leqq [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$.

(12) *Aus* $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \leqq [\mathfrak{C}, \mathfrak{D}]$ *und* $[\mathfrak{C}, \mathfrak{D}] \leqq [\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$ *folgt* $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \leqq [\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$.

(13) *Aus* $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \leqq [\mathfrak{C}, \mathfrak{D}]$ *und* $[\mathfrak{C}, \mathfrak{D}] \leqq [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ *folgt, daß* $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{D}$, *d. h.* $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = [\mathfrak{C}, \mathfrak{D}]$.

Wir haben also

(14) $\mathfrak{S}$ *ist durch Def. II teilweise geordnet.*

Ist $\{[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]\}$ irgendeine Menge von Schnitten, so ist der mengentheoretische Durchschnitt aller Mengen $\{\mathfrak{A}\}$ bzw. $\{\mathfrak{B}\}$ nicht leer. Wir bezeichnen den ersten Durchschnitt mit $\mathfrak{A}^*$ bzw. den zweiten mit $\mathfrak{B}^*$. Wir bezeichnen weiter mit $\mathfrak{B}_*$ die Teilmenge von $\mathfrak{E}$, die aus allen $g_* \in \mathfrak{E}$ besteht, die die Bedingung erfüllen:

(15) Es ist $g_* \geqq f^*$ für jedes $f^* \in \mathfrak{A}^*$

bzw. mit $\mathfrak{A}_*$ die Teilmenge von $\mathfrak{E}$, die aus allen $f_* \in \mathfrak{E}$ besteht, die die Bedingung erfüllen:

(16) Es ist $f_* \leqq g^*$ für jedes $g^* \in \mathfrak{B}^*$.

Nun beweist man [12]): $[\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}_*]$ bzw. $[\mathfrak{A}_*, \mathfrak{B}^*]$ sind Schnitte und zwar ist $[\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}_*] = \bigcap [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$, d. h. der Durchschnitt aller Schnitte $\{[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]\}$ bzw. $[\mathfrak{A}_*, \mathfrak{B}^*] = \bigcup [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$, d. h. die Vereinigung aller Schnitte $\{[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]\}$. Wir haben also:

(17) $\mathfrak{S}$ *ist ein vollständiger Verband.*

Es sei nun f eine beliebige einfache Ortsfunktion, wir bezeichnen durch $\mathfrak{F}$ die Menge aller Ortsfunktionen $h \in \mathfrak{E}$ mit $h \leqq f$ und durch $\overline{\mathfrak{F}}$ die Menge aller Ortsfunktionen $\overline{h} \in \mathfrak{E}$ mit $f \leqq \overline{h}$; dann ist $[\mathfrak{F}, \overline{\mathfrak{F}}]$ ein Schnitt. Man kann also jeder Ortsfunktion $f \in \mathfrak{E}$ einen Schnitt $[\mathfrak{F}, \overline{\mathfrak{F}}]$ zuordnen. Durch diese Zuordnung haben wir einen Isomorphismus zwischen den Elementen von $\mathfrak{E}$ und den Elementen einer Teilmenge $\mathfrak{E}^*$ von $\mathfrak{S}$. Bei diesem Isomorphismus bleiben erhalten, die Relation $\leqq$, das Eins- und Nullelement, die Operationen $\cup$ und $\cap$. Man kann also $\mathfrak{S}$ als Erweiterung von $\mathfrak{E}$ betrachten und sagen, daß durch jeden Schnitt $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ eine allgemeine Ortsfunktion dargestellt wird. Es gilt:

(18) Ist $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ ein Schnitt und gehört eine einfache Ortsfunktion f sowohl zu $\mathfrak{A}$, wie auch zu $\mathfrak{B}$, so stellt der Schnitt diese Ortsfunktion

[12]) MAC NEILLE, Zitat 7.

f dar. Denn es ist hier wegen Def. Ib) und c) $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}$ und $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{F}}$. Stellt also ein Schnitt $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ keine einfache Ortsfunktion dar, so gilt: Aus $f \in \mathfrak{A}$ und $g \in \mathfrak{B}$ folgt $f < g$.

Einfache und daher auch allgemeine Ortsfunktionen können wir auf jedem nicht leerem Teilelement x von a definieren:

Die einfache Ortsfunktion f (§ 1 (2)) erklären wir auf x durch:

$$f = S^*(a_i x \to \alpha_i). \tag{19}$$

Die untere bzw. die obere Grenze der Zahlen α_i, welche in (19) vorkommen, kann man als untere Grenze $\alpha(f, x)$ bzw. als obere Grenze $\beta(f, x)$ von f in x bezeichnen.

Es sei f^* eine beliebige Ortsfunktion, die durch den Dedekindschen Schnitt $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ erklärt, wir betrachten die Menge aller reellen Zahlen

$$\{\alpha(h, x)\}, \quad \{\alpha(g, x)\}, \quad \{\beta(h, x)\}, \quad \{\beta(g, x)\}$$

für alle $h \in \mathfrak{A}$ und $g \in \mathfrak{B}$, dann ist

$$[\{\alpha(h, x)\}, \{\alpha(g, x)\}] \text{ bzw. } [\{\beta(h, x)\}, \{\beta(g, x)\}]$$

ein Schnitt von reellen Zahlen und stellt die untere Grenze $\alpha(f^*, x)$ bzw. die obere Grenze $\beta(f^*, x)$ der Ortsfunktion f^* in x dar.

Es sei eine beliebige reelle Zahl λ gegeben, dann kann man das Teilelement von a bestimmen, in welchem eine einfache Ortsfunktion $f \leqq \lambda$ ist; das ist die Vereinigung von allen a_i, auf welchen die zugeordneten Zahlen $\alpha_i \leqq \lambda$ sind. Wir bezeichnen dieses Element mit $[f \leqq \lambda]$. Analog erklärt man die Elemente $[f < \lambda]$, $[f \geqq \lambda]$, $[f = \lambda]$. Für eine beliebige Ortsfunktion f^*, die durch den Schnitt $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ dargestellt ist, erklärt man $[f^* \leqq \lambda]$ bzw. $[f^* < \lambda]$ folgendermaßen: Man setzt:

$$s(\lambda) = \sum_{g \in \mathfrak{B}} \dot{+} [g \leqq \lambda] \quad \text{oder} \quad s^*(\lambda) = \prod_{h \in \mathfrak{A}} [h \leqq \lambda]$$

und dann

$$[f \leqq \lambda] = \prod_{\lambda < \varrho} s(\varrho) = \prod_{\lambda < \varrho} s^*(\varrho) \text{ bzw. } [f < \lambda] = \sum_{\lambda > \varrho} \dot{+} s(\varrho) = \sum_{\lambda > \varrho} \dot{+} s^*(\lambda).$$

$[f > \lambda]$ bzw. $[f \geqq \lambda]$ wird dann als Komplement von $[f \leqq \lambda]$ bzw. $[f < \lambda]$ bezüglich a erklärt und dann

$$[f^* = \lambda] = [f^* \geqq \lambda]\,[f^* \leqq \lambda].$$

Eine beliebige Ortsfunktion f heißt beschränkt in a, wenn $\alpha(f, a)$ und $\beta(f, a)$ endliche Zahlen sind, sie heißt endlich, wenn

$$[f = +\infty] \text{ und } [f = -\infty]$$

leer sind. Es gilt dann:

Die Ortsfunktion $f = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ ist dann und nur dann beschränkt, wenn zwei endliche Zahlen λ_1 und λ_2 existieren, so daß

$$\lambda_1 \leqq g \text{ für jedes } g \in \mathfrak{B} \text{ und } \lambda_2 \geqq h \text{ für jedes } h \in \mathfrak{A}$$

gilt.

§ 3.

Vergleich mit der Carathéodoryschen Definition.

Carathéodory hat die beschränkten Ortsfunktionen durch Schnitte folgendermaßen erklärt:

Es sei $\mathfrak{E}_0$ die Menge aller einfachen Ortsfunktionen, die Zerlegungen mit endlich vielen Zerlegungsgliedern entsprechen, und endlich sind, d. h. $f \in \mathfrak{E}_0$ bedeutet

$$f = S(a_i \to \alpha_i) \quad i = 1, 2, \ldots, n \text{ und } -\infty < \alpha_i < +\infty.$$

Solche einfachen Ortsfunktionen nennt Carathéodory endlichwertig. Zwei Teilmengen $\{h\}$, $\{g\}$ von $\mathfrak{E}_0$ bilden einen Schnitt, wenn folgendes gilt:

α) Aus $h \in \{h\}$ und $g \in \{g\}$ folgt $h \leqq g$.

β) Jeder positiven Zahl $\varepsilon > 0$ kann man mindestens ein h und ein g zuordnen, so daß $g - h < \varepsilon$ ist.

Diese Schnitte können teilweise geordnet werden. Nur folgt hier nicht aus $[\{h\}, \{g\}] \leqq [\{h'\}, \{g'\}]$ und $[\{h'\}, \{g'\}] \leqq [\{h\}, \{g\}]$, daß die Menge $\{h\} = \{h'\}$ bzw. $\{g\} = \{g'\}$ ist, also die Schnitte gleich sind. Man kann aber in diesem Falle die Schnitte als äquivalent betrachten und nach dieser Äquivalenzrelation die Menge aller Carathéodoryschen Schnitte in Klassen ordnen. Jeder Klasse ordnet man dann durch Definition eine beschränkte Ortsfunktion zu.

Es sei jetzt k eine Klasse von Schnitten, die die beschränkte Ortsfunktion f definiert, $[\{h\}, \{g\}]$ ein Repräsentant der Klasse. Wir bezeichnen die Menge aller einfachen Ortsfunktionen $g^* \in \mathfrak{E}$, für welche

$$h \leqq g^* \qquad \text{für alle } h \in \{h\} \prec \mathfrak{E}_0$$

gilt, mit $\mathfrak{B}^*$ und die Menge aller einfachen Ortsfunktionen $h^* \in \mathfrak{E}$, für welche

$$g \geqq h^* \qquad \text{für alle } g \in \{g\} \prec \mathfrak{E}_0$$

gilt, mit $\mathfrak{A}^*$; dann ist $[\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*]$ ein Schnitt in unserem Sinne. Es ist klar, daß man zu demselben Schnitt $[\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*]$ kommt, wenn man von irgend einen anderen Repräsentant der Klasse k ausgeht. Jeder Carathéodoryschen Ortsfunktion können wir also eine beschränkte Ortsfunktion aus $\mathfrak{S}$ zuordnen. Aber auch umgekehrt, jeder beschränkten Ortsfunktion aus $\mathfrak{S}$ kann man einen Carathéodoryschen Schnitt und dementsprechend eine Carathéodorysche beschränkte Ortsfunktion zuordnen. Da nämlich $f = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \in \mathfrak{S}$ beschränkt ist, gibt es zwei endliche Zahlen α und β, so daß $\alpha \leqq g$ für alle $g \in \mathfrak{B}$ und $\beta \geqq h$ für alle $h \in \mathfrak{A}$ ist. Betrachtet man jetzt die Teilmenge $\mathfrak{A}^*$ bzw. $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{A}$ bzw. von $\mathfrak{B}$, die aus allen endlichwertigen Ortsfunktionen besteht, deren Wertevorrat zwischen α und β liegt, so ist $[\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*]$ ein Carathéodoryscher Schnitt, also ein Repräsentant der Klasse, die eine beschränkte Carathéodorysche Ortsfunktion erklärt. Da hier α) gilt, braucht man

nur β) zu beweisen. Es sei nämlich $\varepsilon > 0$ eine beliebige Zahl, dann können wir zwischen α und β endlich viele Zahlen wählen:

$$\alpha = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = \beta$$

derart, daß $\lambda_{i+1} - \lambda_i < \varepsilon$ für alle $i = 0, 1, 2 \ldots, n$ ist. Wir setzen

$$s_i = [f \geqq \lambda_i] + [f \geqq \lambda_{i+1}] = [\lambda_i \leqq f < \lambda_{i+1}] \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

und betrachten die zwei endlichwerten Ortsfunktionen

$$h_n = S^*(s_i \to \lambda_i), \quad g_n = S^*(s_i \to \lambda_{i+1}) \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Es ist $h_n \in \mathfrak{A}^*$ und $g_n \in \mathfrak{B}^*$ und $g_n - h_n < \varepsilon$; β) ist also auch erfüllt.

§ 4.

Endliche Ortsfunktionen.

Es sei $f = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ eine endliche Ortsfunktion und ε eine beliebige positive Zahl; wir werden zeigen, daß es mindestens eine endliche einfache Ortsfunktion $h \in \mathfrak{A}$ und eine einfache endliche Ortsfunktion $g \in \mathfrak{B}$ gibt, derart, daß $g - h < \varepsilon$ ist. Denn wir können abzählbar viele Zahlen λ wählen, so daß

$$-\infty < \ldots < \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < +\infty$$

mit $\lim \lambda_n = +\infty$, $\lim \lambda_{-n} = -\infty$ und

$$|\lambda_{i+1} - \lambda_i| < \varepsilon \quad \text{für alle } i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

dann setzen wir

$$s_i = [\lambda_i \leqq f < \lambda_{i+1}] \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

und bilden die zwei einfachen Ortsfunktionen

$$h = S^*(s_i \to \lambda_i) \quad g = S^*(s_i \to \lambda_{i+1}) \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Es ist nun $h \in \mathfrak{A}$, $g \in \mathfrak{B}$ und $g - h < \varepsilon$.

Die letztere Eigenschaft der endlichen Ortsfunktionen erlaubt uns die endlichen Ortsfunktionen mit der Carathéodoryschen Methode durch Schnitte, aus der Menge aller einfachen endlichen Ortsfunktionen zu erklären.

Man kann außerdem leicht die Summe, Differenz, das Produkt und den Quotienten von zwei endlichen Ortsfunktionen erklären. Es seien z. B. $f = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ und $f' = [\mathfrak{A}', \mathfrak{B}']$ zwei endliche Ortsfunktionen; jedem Paar von endlichen einfachen Ortsfunktionen $h \in \mathfrak{A}$, $h' \in \mathfrak{A}'$ bzw. $g \in \mathfrak{B}$, $g' \in \mathfrak{B}'$ ordnen wir nach § 1 Formel (5) die endlichen einfachen Ortsfunktionen $h + h'$ bzw. $g + g'$ zu. Die Mengen $\{h + h'\}$ und $\{g + g'\}$ bilden dann einen Schnitt nach Carathéodory. Jetzt fügen wir zu der Menge $\{h + h'\}$ alle einfachen Ortsfunktionen $h^* \in \mathfrak{E}$, für welche $h^* \leqq g + g'$ für alle $g + g'$ gilt und zu der Menge $\{g + g'\}$ alle einfachen Ortsfunktionen $g^* \in \mathfrak{E}$, für welche $h + h' \leqq g^*$ für alle $h + h'$ gilt, so hat man einen Schnitt in unserem Sinne, der die Summe $f + f'$ darstellt. Analog kann man Produkt, Differenz und Quotient erklären.

§ 5.

Ortsfunktionen in Booleschen Algebren mit reduziertem Maß.

Es sei R_φ ein vollkommener Boolescher Ring (Algebra). In R_φ sei eine Maßfunktion φ definiert, die totaladditiv, reduziert und normal ist[14]). Für ein Element $a \in R_\varphi$ sei $\varphi(a) < +\infty$. Die Teilmenge R_φ^a von R_φ, die aus allen Elementen von R_φ besteht, die Teile von a sind, ist auch ein vollkommener Ring und zwar mit vollem Element. Die Maßfunktion φ ist in R_φ^a totaladditiv, reduziert und beschränkt; R_φ^a ist also nach einem Satz von Wecken[15]) vollständig. Erklärt man auf a die Menge $\mathfrak{E}$ der einfachen Ortsfunktionen und dann durch Dedekindsche Schnitte die Menge $\mathfrak{S}$ aller Ortsfunktionen, so sind wegen der Vollständigkeit des Ringes R_φ^a die Elemente $[f \geqq \lambda]$ für alle reellen Zahlen λ und für alle Ortsfunktionen $f \in \mathfrak{S}$ in R_φ^a vorhanden, d. h. alle Ortsfunktionen $f \in \mathfrak{S}$ sind meßbar. Betrachtet man als summierbare Ortsfunktionen über a diejenigen Ortsfunktionen, für welche der Integralwert über a eine endliche Zahl ist, so sind alle nicht endlichen Ortsfunktionen nicht summierbar, denn wir haben für eine nicht endliche Ortsfunktion f eine oder beide Elemente $[f = +\infty]$, $[f = -\infty]$ nicht leer, also für ein oder beide dieser Elemente die Maßfunktion $\varphi > 0$. Der Integralwert ist also für eine nicht endliche Ortsfunktion entweder $+\infty$ oder $-\infty$ oder nicht vorhanden. Man braucht also die nicht endlichen Ortsfunktionen nicht in Betracht zu ziehen.

Im letzten § haben wir gesehen, daß man die Menge der endlichen Ortsfunktionen mit der Carathéodoryschen Methode durch Schnitte, aus der Menge aller einfachen endlichen Ortsfunktionen definieren kann. Wir werden jetzt sehen, wie wir zu der Menge aller endlichen Ortsfunktionen durch Fundamentalfolgen aus der Menge der endlichen einfachen Ortsfunktionen gelangen.

Für ein Element $a \in R_\varphi$ mit $\varphi(a) < +\infty$ erklären wir wie in § 1 alle einfachen aber endlichen Ortsfunktionen, deren Menge wir mit $\mathfrak{E}'$ bezeichnen. Die in § 1 durch (5) erklärten Operationen $f \pm g$, fg sind dann immer in $\mathfrak{E}'$ ausführbar und $\mathfrak{E}'$ ist in bezug auf diese Operationen ein Ring, die Menge der konstanten Ortsfunktionen ist isomorph zu dem Körper der reellen Zahlen. Durch die Erklärungen (6) und (7) § 1 ist die Menge teilweise geordnet und bezüglich der Operationen (9) § 1 ein distributiver Verband ohne leeres und volles Element. Wir setzen

$$f^+ = f \cup 0, \quad f^- = (-f) \cup 0, \tag{1}$$

dann ist

$$f = f^+ - f^- \text{ und } |f| = f^+ + f^- = f \cup (-f). \tag{2}$$

[14]) S. diese Begriffe KCI. § 8.

[15]) Wecken, Math. Zeitschrift 45 (1939), auch KCI. § 11.

Die sogenannten charakteristischen Ortsfunktionen, d. h. die einfachen Ortsfunktionen, die nur die Werte Null und Eins annehmen, bilden eine Teilmenge $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{E}'$. $\mathfrak{C}$ ist ein Unterverband von $\mathfrak{E}'$ mit Null- (bzw. Eins-)Element, nämlich mit den konstanten Ortsfunktionen 0 und 1, der komplementär ist. $\mathfrak{C}$ ist also eine Boolesche Algebra.

Definition. *Eine Folge $f_1, f_2, \ldots$ aus $\mathfrak{E}'$ heißt nach oben (bzw. unten) beschränkt in $\mathfrak{E}'$, wenn es ein $g \in \mathfrak{E}'$ existiert derart, daß*

$$f_i \leqq g \text{ bzw. } f_i \geqq g \qquad \text{für alle } i = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

gilt. Ist g eine konstante Ortsfunktion, so heißt die Folge nach oben (bzw. unten) gleichmäßig beschränkt. Die Folge heißt beschränkt, wenn sie gleichzeitig nach oben und unten beschränkt ist.

Die kleinste (bzw. größte) unter den Ortsfunktionen g, die die Bedingung (3) erfüllt, falls sie existiert, ist durch

$$\bigcup_i f_i \text{ bzw. } \bigcap_i f_i \tag{4}$$

gegeben, sie heißt obere (bzw. untere) Grenzortsfunktion der Folge $\{f_i\}$. Es ist sehr wichtig für die Einführung von Grenzprozessen, daß die unter der Bedingung der Beschränktheit eingeführten Operationen $\cup$ und $\cap$ für abzählbar viele Elemente ausführbar sind. Dies wollen wir durch Erweiterung des Verbandes $\mathfrak{E}'$ erreichen.

Definition α. *Eine Folge $\{f_i\}$ aus $\mathfrak{E}'$ heißt konvergent gegen $f \in \mathfrak{E}'$, in Zeichen $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, wenn zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ existiert derart, daß $|f_n - f| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ gilt. Ist $f = 0$, so heißt die Folge eine Nullfolge.*

Definition β. *Eine Folge $\{f_i\}$ aus $\mathfrak{E}'$ heißt eine Fundamentalfolge, wenn zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ existiert derart, daß $|f_\mu - f_\nu| < \varepsilon$ für alle $\mu, \nu > n_0$ gilt.*

Jede nach Def. α konvergierende Folge ist eine Fundamentalfolge; zu jeder Fundamentalfolge existiert aber nicht immer eine Grenzortsfunktion in $\mathfrak{E}'$.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}$ die Menge aller Fundamentalfolgen aus $\mathfrak{E}'$ mit $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{N}$ die Menge aller konvergierenden Folgen (bzw. Nullfolgen) in $\mathfrak{E}'$. Dann ist $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{K} \prec \mathfrak{M}$.

Nun definieren wir die folgenden Operationen in $\mathfrak{M}$.

$$\{f_i\} \pm \{g_i\} = \{f_i \pm g_i\} \tag{4}$$

$$\{f_i\} \cdot \{g_i\} = \{f_i g_i\} \tag{5}$$

$$\{f_i\} \cup \{g_i\} = \{f_i \cup g_i\} \tag{6}$$

$$\{f_i\} \cap \{g_i\} = \{f_i \cap g_i\} \tag{7}$$

$$|\{f_i\}| = \{|f_i|\} \tag{8}$$

Wir bemerken, daß alle diese Operationen mit Ausnahme von (5) immer ausführbar in $\mathfrak{M}$ sind, denn die Folgen rechts in (4), (6)—(8) sind Fundamentalfolgen, wenn $\{f_i\}$ und $\{g_i\}$ Fundamentalfolgen sind, wie

man leicht zeigen kann, ganz analog, wie bei der Erweiterung der rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen[16]). Die Operation (5) ist nur für gleichmäßig beschränkte Fundamentalfolgen immer ausführbar.

In $\mathfrak{M}$ führen wir jetzt eine Äquivalenzrelation ein:

Definition γ. *Zwei Fundamentalfolgen heißen äquivalent in Zeichen* $\{f_i\} \sim \{g_i\}$, *wenn* $\{f_i - g_i\}$ *in* $\mathfrak{N}$ *ist.*

Es gilt offenbar:

(9) Aus $\{f_i\} \sim \{g_i\}$ *und* $\{f_i^*\} \sim \{g_i^*\}$ *folgt:*

1) $\{f_i\} \pm \{f_i^*\} \sim \{g_i\} \pm \{g_i^*\}$, 2) $\{f_i\} \cup \{f_i^*\} \sim \{g_i\} \cup \{g_i^*\}$,
3) $\{f_i\} \cap \{f_i^*\} \sim \{g_i\} \cap \{g_i^*\}$, 4) $\lambda . \{f_i\} \sim \lambda . \{g_i^*\}$.

Durch Def. γ wird $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{N}$ in Restklassen eingeteilt, deren Menge wir mit $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ bzw. $\mathfrak{N}^* = \mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ bezeichnen.

Wegen (9) können wir die Operationen zwischen zwei Elementen (Restklassen) aus $\mathfrak{E}^*$ durch Repräsentanten in $\mathfrak{M}$ erklären.

Da $\mathfrak{N}^*$ isomorph zu $\mathfrak{E}'$ relativ zu allen diesen Operationen ist, so identifizieren wir die Elemente von $\mathfrak{N}^*$, mit denen von $\mathfrak{E}'$ und betrachten $\mathfrak{E}^*$ als Erweiterung von $\mathfrak{E}'$. Die Elemente von $\mathfrak{E}^*$ nennen wir allgemeine endliche Ortsfunktionen auf a und bezeichnen sie auch mit f, g, h usw.

Da $\mathfrak{E}^*$ in Bezug zu $\cup$ und $\cap$ ein Verband ist, so können wir die Relation $\leqq$ in $\mathfrak{E}^*$ folgendermaßen definieren

Def. δ. *Es ist* $f \leqq g$, *wenn* $f \cap g = f$ *oder* $f \cup g = g$ *ist.*

Wir beweisen jetzt den Satz:

Satz A. *Es sei* $\mathfrak{r}$ *eine Restklasse, die eine Ortsfunktion* $f \in \mathfrak{E}^*$ *definiert, dann gibt es in* $\mathfrak{r}$ *ein Paar von Fundamentalfolgen* $\{f_i'\}, \{f_i''\}$, *so daß*

$$f_\mu' \leqq f_\nu' \leqq f_\nu'' \leqq f_\mu'' \qquad \text{für alle } \mu \leqq \nu \tag{10}$$

gilt.

Beweis. Es sei $\{f_i\}$ eine beliebige Fundamentalfolge der Restklasse $\mathfrak{r}$ und $\{\varepsilon_i\}$ irgendeine Nullfolge von positiven Zahlen, dann kann man zu jedem $\varepsilon_i > 0$ eine natürliche Zahl ϱ_i bestimmen, so daß $|f_n - f_m| \leqq \varepsilon_i$ für alle $n \geqq \varrho_i$, $m \geqq \varrho_i$ ist. Die Teilfolge $\{f_{\varrho_i}\}$ von $\{f_i\}$ gehört auch der Klasse $\mathfrak{r}$ an. Nun setzen wir

$$\{f_i^*\} = \{f_{\varrho_i} - \varepsilon_i\}, \quad \{f_i^{**}\} = \{f_{\varrho_i} + \varepsilon_i\}.$$

Diese beiden Folgen gehören auch der Klasse $\mathfrak{r}$ an und es gilt:

$$f_m^* \leqq f_n^{**} \qquad \text{für alle } m, n = 1, 2, \ldots.$$

Setzt man

$$\begin{aligned} f_1' &= f_1^*, \quad & f_{n+1}' &= f_{n+1}^* \cup f_n' \\ f_1'' &= f_1^{**}, \quad & f_{n+1}'' &= f_{n+1}^{**} \cap f_n'' \end{aligned} \qquad \text{für alle } n = 1, 2, \ldots,$$

so bekommt man zwei Folgen $\{f_i'\}$ und $\{f_i''\}$ die auch zu $\mathfrak{r}$ gehören und die Eigenschaft (10) besitzen, w. z. b. w.

[16]) vgl. z. B. VAN DER WAERDEN. Moderne Algebra I, 2. Aufl., 1937, § 67.

Def. ε. *Zwei Folgen* $\{f_i\}$, $\{g_i\}$ *aus* $\mathfrak{E}'$ *bilden eine Schachtelung in* $\mathfrak{E}'$, *in Zeichen* $[f_i, g_i]$, *wenn für sie folgendes gilt:*

1) $f_\mu \leqq f_\nu \leqq g_\nu \leqq g_\mu$ *für alle* $\mu \leqq \nu$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (g_n - f_n) = 0.$

Bezeichnet man mit $\mathfrak{M}'$ die Menge aller Schachtelungen und führt man die Äquivalenzrelation:

(11) $[f_i', g_i'] \sim [f_i'', g_i'']$, wenn $f_i' \leqq g_i''$ und $f_i'' \leqq g_i'$

in $\mathfrak{M}$ ein und bezeichnet man mit $\mathfrak{E}^{**}$ die Menge der Restklassen nach dieser Äquivalenzrelation, so folgt aus Satz A, daß $\mathfrak{E}^{**}$ zu $\mathfrak{E}^*$ isomorph ist.

Wir beweisen jetzt

Satz B. *Die Menge* $\mathfrak{E}^*$ *ist vollständig, d. h. jede Fundamentalfolge, die wir aus Elementen von* $\mathfrak{E}^*$ *bilden können, ist konvergent in* $\mathfrak{E}^*$.

Beweis. Zuerst folgt aus der Definition von $\mathfrak{E}^*$, daß jede Fundamentalfolge $\{f_i\}$ mit $f_i \in \mathfrak{E}' \prec \mathfrak{E}^*$ konvergent ist, also $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f^* \in \mathfrak{E}^*$.

Es sei jetzt eine beliebige Fundamentalfolge $\{f_i^*\}$ in $\mathfrak{E}^*$, dann existiert eine Fundamentalfolge $\{f_{in}\}$ aus $\mathfrak{E}'$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_{in} = f_i^*$, $i = 1, 2, \ldots$.

Ist $\{\varepsilon_i\}$ eine Nullfolge von positiven Zahlen, so können wir zu jedem ε_i eine Zahl ν_i bestimmen, so daß

(11) $$|f_{i\nu_i} - f_i^*| < \varepsilon_i$$

gilt. Wir setzen $f_{i\nu_i} = f_i'$, dann ist also

(12) $$|f_i' - f_i^*| < \varepsilon_i, \quad f_i' \in \mathfrak{E}'.$$

Wir bilden nun die Folge $\{f_i'\}$ $f_i' \in \mathfrak{E}'$, und zeigen, daß sie eine Fundamentalfolge ist. Dazu bemerken wir, daß es zu jedem ε erstens ein $n'(\varepsilon)$ gibt derart, daß

$$|f_n^* - f_m^*| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \qquad \text{für alle } n, m > n'$$

gilt und zweitens ein $n''(\varepsilon)$ derart, daß

$$\varepsilon_k < \tfrac{1}{3}\varepsilon \qquad \text{für alle } k > n''.$$

Dann haben wir aber

$$|f_m' - f_n'| \leqq |f_m' - f_m^*| + |f_m^* - f_n^*| + |f_n^* - f_n'| < \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon$$

also

$$|f_m' - f_n'| < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n > n_0 = \operatorname{Max}(n', n'').$$

Es gibt also ein $f^* \in \mathfrak{E}^*$, so daß $\lim\limits_{n\to\infty} f_n' = f^*$ und wegen (12) ist dann $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^* = f^*$ w. z. b. w.

Aus der Definition von $\mathfrak{E}^*$ und der Relation $\leqq$ in $\mathfrak{E}^*$ folgt leicht:

Satz C. *Es seien f und $f^* \in \mathfrak{E}^*$ und $\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{r}^*$ die Restklassen in $\mathfrak{M}$ die f bzw. f^* definieren, dann gilt*

$$f \leqq f^*$$

dann und nur dann, wenn eine Folge $\{f_i\}$ in $\mathfrak{r}$ b w. eine Folge $\{f_i^*\}$ in $\mathfrak{r}^*$ existiert, so daß $f_i^* - f_i \geqq 0$ für alle $i = 1, 2, \ldots$ gilt.

Wir bemerken, daß jede Fundamentalfolge $\{f_i\}$ aus $\mathfrak{E}'$ beschränkt in $\mathfrak{E}'$ ist, d. h. es existiert ein $g \in \mathfrak{E}'$ derart, daß $|f_i| \leqq g$ für alle $i = 1, 2, \ldots$. Daraus folgt

Satz D. *Zu jedem $f \in \mathfrak{E}^*$ existiert immer ein $g \in \mathfrak{E}'$ derart, daß $|f| \leqq g$ ist.*

§ 6.

Somenskalen.

Es sei $f \in \mathfrak{E}'$, nämlich $f = S(a_i \to \alpha_i)$. Einer jeden endlichen Zahl λ ordnen wir die Summe aller a_i, deren zugeordnete Werte $\alpha_i < \lambda$ sind, zu. Diese Summe, die ein Teilelement von a ist, bezeichnen wir mit $[f < \lambda] = s_f(\lambda)$. Gibt es keine Zahl $\alpha_i < \lambda$, so setzen wir $s_f(\lambda) = o$. Dies kommt vor, falls f nach unten beschränkt ist. Ist f nach oben beschränkt, so gibt es eine Zahl λ, so daß $s_f(\lambda) = a$.

Analog kann man der Zahl λ die Elemente

$$[f \leqq \lambda] = s_f'(\lambda), \quad [f \geqq \lambda] = \bar{s}_f(\lambda), \quad [f > \lambda] = \bar{s}'(\lambda)$$

zuordnen. Es gelten:

I. Für $\varrho < \lambda$ $\qquad s_f(\varrho) \subseteq s_f'(\varrho) \subseteq s_f(\lambda) \subseteq s_f'(\lambda)$.

II. α) Ist $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots$ und $\lim \lambda_n = \lambda > -\infty$, so ist

$$\prod s_f'(\lambda_n) = \lim \operatorname{alg} s_f'(\lambda_n) = \prod s_f(\lambda_n) = \lim \operatorname{alg} s_f(\lambda_n) = s_f'(\lambda).$$

β) Ist $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ und $\lim \lambda_n = \lambda < +\infty$, so ist

$$\sum \dot{+} s_f'(\lambda_n) = \lim \operatorname{alg} s_f'(\lambda_n) = \sum \dot{+} s_f(\lambda_n) = \lim \operatorname{alg} s_f(\lambda_n) = s_f(\lambda).$$

γ) Es ist $\quad \lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{alg} s_f'(n) = \lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{alg} s_f(n) = a,$

$$\lim_{n \to -\infty} \operatorname{alg} s_f'(n) = \lim_{n \to -\infty} \operatorname{alg} s_f(n) = o.$$

Entsprechende Eigenschaften gelten für die komplementären Elemente $\bar{s}_f(\lambda)$ und $\bar{s}_f'(\lambda)$.

Man nennt nach Carathéodory das System der Elemente $\{s_f(\lambda)\}$ bzw. $\{s_f'(\lambda)\}$ für alle λ, die untere bzw. die obere Skala von f. Für beschränkte einfache Ortsfunktionen sind in $\{s_f(\lambda)\}$ bzw. in $\{s_f'(\lambda)\}$ die Elemente o und a enthalten.

Wir nennen jedes von λ abhängige System $\{t(\lambda)\}$ für welche die Relation

(1) $\qquad s_f(\lambda) \subseteq t(\lambda) \subseteq s_f'(\lambda)$ $\qquad$ für alle λ

gilt, eine Skala von f. Die Skalen von f haben die folgenden charakteristischen Eigenschaften:

A. Ist $s(\lambda)$ eine Skala von f, so ist 1) für $\varrho < \lambda$ $s(\varrho) \subseteqq s(\lambda)$ und 2) $\limalg_{n \to +\infty} s(n) = o$, $\limalg_{n \to -\infty} s(n) = o$.

B. Sind $s(\lambda)$ und $t(\lambda)$ zwei Skalen von f, so ist für $\varrho < \lambda$

$$s(\varrho) \subseteqq t(\lambda) \quad \text{und} \quad t(\varrho) \subseteqq s(\lambda).$$

Nun können wir Skalen mit diesen Eigenschaften einer beliebigen Ortsfunktion zuordnen. Es sei $f \in \mathfrak{E}^*$ und $\mathfrak{r}$ die Restklasse, die f definiert, dann gibt es eine Schachtelung $[f_i, g_i]$ von Fundamentalfolgen aus $\mathfrak{r}$. Es gilt offenbar

$$s_{f_\nu}(\lambda) \supseteqq s_{f_{\nu+1}}(\lambda) \quad \text{bzw.} \quad s_{g_\nu}(\lambda) \subseteqq s_{g_{\nu+1}}(\lambda).$$

Es existiert also

$$(2) \qquad \limalg_{n \to \infty} s_{f_n}(\lambda) = s^*(\lambda) \quad \text{bzw.} \quad \limalg_{n \to \infty} s_{g_n}(\lambda) = t^*(\lambda),$$

und $s^*(\lambda)$ bzw. $t^*(\lambda)$ besitzt die Eigenschaften $A_{1),2)}$. Es gilt außerdem für $s^*(\lambda)$ und $t^*(\lambda)$ die Eigenschaft B. Wir können also $s^*(\lambda)$ und $t^*(\lambda)$ als Skalen derselben Ortsfunktion f betrachten.

Wir wollen jetzt f die obere und untere Skala zuordnen: Es sei eine beliebige Folge von Zahlen $\lambda_1' < \lambda_2' < \ldots$ mit $\lim \lambda_n' = \lambda$, dann setzen wir

$$(3) \qquad \limalg s^*(\lambda_n') = s_f(\lambda).$$

Es sei $\lambda_1'' > \lambda_2'' > \ldots$ mit $\lim \lambda_n'' = \lambda$, dann setzen wir

$$(4) \qquad \limalg s^*(\lambda_n'') = s_f'(\lambda).$$

Man beweist, daß auch

$$(5) \qquad \limalg t^*(\lambda_n') = s_f(\lambda) \quad \text{und} \quad \limalg t^*(\lambda_n'') = s_f'(\lambda)$$

ist und zwar $s_f(\lambda)$ und $s_f'(\lambda)$ unabhängig von der Wahl der Schachtelung $[f_i, g_i]$ und der Folgen $\{\lambda_n'\}$ bzw. $\{\lambda_n''\}$. $s_f(\lambda)$ und $s_f'(\lambda)$ besitzen die Eigenschaften einer Skala und außerdem gilt für jede Skala $t_f(\lambda)$, die man für f konstruieren kann

$$s_f(\lambda) \subseteqq t_f(\lambda) \subseteqq s_f'(\lambda).$$

Wir können also $s_f(\lambda)$ bzw. $s_f'(\lambda)$ als untere (bzw. obere) Skala von f betrachten und auch mit $[f < \lambda]$ bzw. $[f \leqq \lambda]$ bezeichnen. Dann kann man das Element $[f > \lambda]$ als $\bar{s}_f'(\lambda)$ und das Element $[f \geqq \lambda]$ als $\bar{s}_f(\lambda)$ bestimmen.

Wir sehen also, daß jeder Ortsfunktion $f \in \mathfrak{E}^*$ Skalen zugeordnet sind; unter diesen Skalen gibt es immer eine untere bzw. obere Skala, die eindeutig bestimmt sind und eventuell identisch sein können.

Erklärt man nun umgekehrt die Skalen durch ihre charakteristischen Eigenschaften, d. h.:

Eine Skala auf a ist ein System $\{s(\lambda)\}$, *für alle* $-\infty < \lambda < +\infty$, *von Teilelementen des Elementes a mit den Eigenschaften:*

I. *Für* $\varrho < \lambda$ *ist* $s(\varrho) \subseteq s(\lambda)$.

II. *Es ist* $\lim\limits_{n \to +\infty} \operatorname{alg} s(n) = a$, $\lim\limits_{n \to -\infty} \operatorname{alg} s(n) = o$.

III. *Zwei Skalen* $\{s(\lambda)\}$ *und* $\{t(\lambda)\}$ *auf a heißen äquivalent, wenn für* $\lambda < \mu$ *stets* $s(\lambda) \subseteq t(\mu)$ *und* $t(\lambda) \subseteq s(\mu)$ *gilt,*

führt man die Operationen $\cup, \cap, \pm, \cdot$ zwischen Skalen ein und bildet man dann die Restklassen nach der Äquivalenzrelation III, so hat man eine Menge von Restklassen S^*, die der Menge $\mathfrak{E}^*$ der endlichen Ortsfunktionen isomorph ist.

Die endlichen Ortsfunktionen auf a kann man also nach CARATHÉODORY durch Skalenklassen erklären. WECKEN[17]) zieht zur Definition der Ortsfunktionen nur die obere Skala in Betracht, indem er eine Skala („*charakteristische Schar*") durch I, II und:

III*. Ist $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots$ mit $\lim \lambda_n = \lambda$, so ist $\lim s(\lambda_n) = s(\lambda)$ erklärt.

§ 7.

Grenzprozesse mit Ortsfunktionen.

Wir wollen zeigen, daß die Operation $\cup$ bzw. $\cap$ für abzählbar viele Elemente $f_1, f_2, \ldots$ in $\mathfrak{E}^*$ stets ausführbar ist, wenn wir für die Folge $f_1, f_2, \ldots$ Beschränktheit in $\mathfrak{E}^*$ fordern.

Wir zeigen zuerst

Satz 1. *Es seien* $f_1, f_2, \ldots$ *Elemente aus* $\mathfrak{E}' < \mathfrak{E}^*$ *mit* $f_\nu \leqq f_{\nu+1}$ *und* $0 \leqq f_\nu \leqq g$, *wobei* $g \in \mathfrak{E}'$, *für* $\nu = 1, 2, \ldots$, *dann gibt es eine Ortsfunktion* $f \in \mathfrak{E}^*$, *so daß* $f = \cup f_\nu$ *ist.*

Beweis. Wir bilden die Elemente $[f_i < \lambda] = s_i(\lambda)$, $[f_i \geqq \lambda] = \bar{s}_i(\lambda)$ für alle $i = 1, 2, \ldots$ und $[g < \lambda] = t(\lambda)$, $[g \geqq \lambda] = \bar{t}(\lambda)$. Dann gilt offenbar beim festen λ:

$$(1) \qquad s_1 \supseteq s_2 \supseteq \ldots \supseteq t \text{ bzw. } s_1 \subseteq s_2 \subseteq \ldots \subseteq \bar{t}$$

und weil $s_i + s_i = a$, $s_i s_i = o$ ist, so haben wir

$$(1') \qquad s = \lim \operatorname{alg} s_i = \prod s_i \text{ bzw. } \bar{s} = \lim \operatorname{alg} \bar{s}_i = \dot{\sum} s_i \text{ mit}$$

$$s + s = a,\ ss = o;\ s \supseteq t,\ \bar{s} \subseteq \bar{t}$$

und weil die Folge nach oben beschränkt ist, so gibt es λ, so daß $s(\lambda)$ nicht leer. Wir setzen

$$(2) \qquad a_{mn} = \bar{s}\left(\frac{m}{2^n}\right) s\left(\frac{m+1}{2^n}\right) \qquad \text{für alle } m, n = 0, 1, 2, \ldots$$

Dann ist

$$(3) \qquad a = a_{0n} + a_{1n} + a_{2n} + \cdots \qquad \text{mit } a_{in}\, a_{jn} = o \text{ für alle } i \neq j$$

[17]) WECKEN, Zit. 15.

Denn es ist

$$a = \sum_{m=0}^{\infty} \dot{+} s\left(\frac{m}{2^n}\right) \quad \text{mit } s\left(\frac{m}{2^n}\right) \subseteq s\left(\frac{m+1}{2^n}\right)$$

also

$$a = \sum_{m=1}^{\infty} \left(s\left(\frac{m}{2^n}\right) - s\left(\frac{m-1}{2^n}\right)\right) = \sum s\left(\frac{m}{2^n}\right) \bar{s}\left(\frac{m-1}{2^n}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1,\,n}$$

und die Summanden sind, wie leicht ersichtlich, paarweise fremd.

Nun betrachten wir die einfachen Ortsfunktionen

$$h'_n = S^*\left(a_{mn} \to \frac{m}{2^n}\right) \quad \text{bzw. } h''_n = S^*\left(a_{mn} \to \frac{m+1}{2^n}\right).$$

Es gilt offenbar $h'_n \leqq h''_n$. Wir behaupten: Es gilt außerdem

$$h'_n \leqq h'_{n+1} \quad \text{bzw. } h''_n \geqq h''_{n+1}. \tag{4}$$

Es ist nämlich

$$h'_{n+1} - h'_n = S^*_{m,\mu}\left(a_{mn}\, a_{\mu,\,n+1} \to \frac{\mu}{2^{n+1}} - \frac{m}{2^n}\right). \tag{5}$$

Ist $\frac{\mu}{2^{n+1}} - \frac{m}{2^n} \leqq 0$, also $\mu < 2m$, so ist $a_{mn}\, a_{\mu,\,n+1}$ leer, d. h. Kombinationen von m, μ mit $\mu < 2m$ kommen in (5) nicht vor, die Ortsfunktion (5) ist $\geqq 0$. Denn wir haben für $\mu < 2m$

$$\frac{\mu+1}{2^{n+1}} \leqq \frac{m}{2^n} \text{ also } \frac{\mu}{2^{n+1}} < \frac{\mu+1}{2^{n+1}} \leqq \frac{m}{2^n} < \frac{m+1}{2^n}$$

und daher

$$s\left(\frac{\mu}{2^{n+1}}\right) \subseteq s\left(\frac{\mu+1}{2^{n+1}}\right) \subseteq s\left(\frac{m}{2^n}\right) \subseteq s\left(\frac{m+1}{2^n}\right).$$

Also

$$a_{mn} = \bar{s}\left(\frac{m}{2^n}\right) s\left(\frac{m+1}{2^n}\right) = s\left(\frac{m+1}{2^n}\right) - s\left(\frac{m}{2^n}\right) \text{ und}$$

$$a_{\mu,\,n+1} = \bar{s}\left(\frac{\mu}{2^{n+1}}\right) s\left(\frac{\mu+1}{2^{n+1}}\right) = s\left(\frac{\mu+1}{2^{n+1}}\right) - s\left(\frac{\mu}{2^{n+1}}\right)$$

sind zueinander fremd. Die erste Ungleichung in (4) ist damit bewiesen. Analog beweist man $h''_n \geqq h''_{n+1}$. Da außerdem $\lim (h''_n - h'_n) = 0$, so ist $[h'_n, h''_n]$ eine Schachtelung in $\mathfrak{E}'$, sie erklärt ein $f \in \mathfrak{E}^*$ und es gilt

$$\lim h'_n = \lim h''_n = f.$$

Nun behaupten wir: Es ist $f = f_1 \cup f_2 \cup \ldots = \bigcup f_\nu$. Denn es ist erstens $f \geqq f_i$ für alle $i = 1, 2, \ldots$, da $f_i < \frac{m+1}{2^n}$ auf $s\left(\frac{m+1}{2^n}\right)$ und demgemäß auf a_{mn} für alle $m = 0, 1, \ldots$ gilt, also $h''_n > f_i$ für alle $n = 1, 2, \ldots$, d. h. $f \geqq f_i$. Zweitens folgt $f^* \geqq f$ aus $f^* \geqq f_i$ $f^* \in \mathfrak{E}^*$ für alle $i = 1, 2, \ldots$, denn für sehr große μ ist sicher

$$[f_\mu \geqq h'_n] = \sum \bar{s}_\mu\left(\frac{m}{2^n}\right) s\left(\frac{m+1}{2^n}\right) \text{ nicht leer}$$

und es gilt $[f_{\mu+1} \geqq h'_n] \supseteq [f_\mu \geqq h'_n]$ und weil $f^* \geqq f_\mu$ für alle μ gilt, so ist sicher $[f^* \geqq h'_n] \supseteq \lim\limits_{\mu \to \infty} \operatorname{alg} [f_\mu \geqq h'_n] = \sum \bar{s}\left(\frac{m}{2^n}\right) s\left(\frac{m+1}{2^n}\right) = \sum a_{mn} = a$.

Also $f^* \geqq h'_n$ für alle n, d. h. $f^* \geqq f$. Der Satz ist also damit bewiesen.

Der Satz gilt auch, falls wir nicht voraussetzen, daß alle $f_i \geqq 0$. Man kann ihn ferner für beliebige nach oben beschränkte nicht abnehmende Folgen von allgemeinen Ortsfunktionen aus $\mathfrak{E}^*$, durch Approximation mit einfachen Ortsfunktionen, beweisen. Einen entsprechenden Satz kann man für nicht zunehmende nach unten beschränkte Folgen zuerst von einfachen und dann von allgemeinen Ortsfunktionen beweisen. Wir formulieren also allgemein den Satz folgendermaßen:

Satz 2. *Für nicht abnehmende (b w. nicht zunehmende) nach oben (bzw. nach unten) beschränkte Folgen $f_1, f_2, \ldots$ von Elementen aus $\mathfrak{E}^*$ existiert $\bigcup_\nu f_\nu$ (bzw. $\bigcap_\nu f_\nu$) stets in $\mathfrak{E}^*$.*

Jetzt beweist man

Satz 3. *Für jede nach oben (bzw. nach unten) beschränkte Folge $f_1, f_2, \ldots$ von Elementen aus $\mathfrak{E}^*$ existiert $\bigcup_i f_i$ (bzw. $\bigcap_i f_i$) in $\mathfrak{E}^*$.*

Wir setzen nämlich $g'_\nu = \bigcup_{n=1}^{\nu} f_n$ bzw. $g''_\nu = \bigcap_{n=1}^{\nu} f_n$; dann existiert nach Satz 2 $\bigcup_\nu g'_\nu$ bzw. $\bigcap_\nu g''_\nu$ und es ist gleich $\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n$ bzw. $\bigcap_{n=1}^{\infty} f_n$ w. z. b. w.

Es gelten weiter für nicht abnehmende nach oben beschränkte Folgen $f_1, f_2, \ldots$ bzw. $g_1, g_2, \ldots$ von Elementen aus $\mathfrak{E}^*$

I. $\bigcup f_\nu + \bigcup g_\nu = \bigcup (f_\nu + g_\nu)$

II. $\bigcup f_\nu \cup g_\nu = \bigcup (f_\nu g_\nu)$ falls $g_\nu \geqq 0$ für alle $\nu = 1, 2, \ldots$

III. $\bigcup f_\nu \cup \bigcup g_\nu = \bigcup (f_\nu \cup g_\nu)$

IV. $\bigcup f_\nu \cap \bigcup g_\nu = \bigcup (f_\nu \cap g_\nu)$.

Entsprechendes gilt, falls diese Folgen nicht zunehmend nach unten beschränkt sind.

Die Konvergenz, die wir durch Def. α § 5 für Folgen von Ortsfunktionen eingeführt haben, entspricht der gleichmäßigen Konvergenz der Folgen von Punktfunktionen. Aber für Folgen von Punktfunktionen wird bekanntlich auch eine gewöhnliche Konvergenz erklärt, also eine Konvergenz der Werte der Funktionen in einem Punkt und dann in dem ganzen Definitionsbereich. Mit Hilfe der Sätze dieses § können wir eine Konvergenz in $\mathfrak{E}^*$ einführen, die der gewöhnlichen Konvergens von Punktfunktionen entspricht. Wir nennen diese Konvergenz algebraisch.

Es sei $f_1, f_2, \ldots$ eine beschänkte Folge von Ortsfunktionen aus $\mathfrak{E}^*$, dann setzen wir

$$g'_\nu = f_\nu \cup f_{\nu+1} \cup \ldots, \qquad g''_\nu = f_\nu \cap f_{\nu+1} \cap \ldots,$$

die nach Satz 3 existieren, so daß gilt:

$$g'_\nu \geqq g'_{\nu+1}, \quad g''_\nu \leqq g''_{\nu+1} \qquad \text{für alle } \nu = 1, 2, \ldots.$$

Die Folgen $g'_1, g'_2, \ldots$ und $g''_1, g''_2, \ldots$ sind außerdem beschränkt. Es existieren nach Satz 1 also $\bigcap g'_\nu$ bzw. $\bigcup g''_\nu$. Nun definieren wir

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \operatorname{alg} f_n = \bigcap g'_\nu = \overline{f} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} \operatorname{alg} f_n = \bigcup g''_n$$

als oberen (bzw. unteren) algebraischen Limes der Folge $f_1, f_2, \ldots$. Ist $\overline{f} = \underline{f} = f$, so sagen wir, daß die Folge $f_1, f_2, \ldots$ algebraisch konvergiert und schreiben

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{alg} f_n = f.$$

Eine Folge, die algebraisch konvergiert, braucht nicht immer eine Fundamentalfolge zu sein.

Beispiel. Wir betrachten eine Zerlegung

$$a = a_1 + a_2 + \cdots$$

und definieren eine Folge von Ortsfunktionen

$$f_n = S(a_i \to \alpha_{in}) \quad \text{für alle } n = 1, 2, \ldots, \text{ wobei } \alpha_{in} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \leqq n \\ 1 & \text{für } i > n. \end{cases}$$

Die Folge $f_1, f_2, \ldots$ ist algebraisch konvergent, denn $f_1 \geqq f_2 \geqq \ldots \geqq 0$ also $\overline{\lim}\operatorname{alg} f_n = \underline{\lim}\operatorname{alg} f_n = \lim \operatorname{alg} f_n = \bigcap f_\nu$ und zwar $\bigcap f_\nu = 0$, denn es gilt zuerst $f_\nu \geqq 0$ für alle $\nu = 1, 2, \ldots$. Ist außerdem $g \leqq f_\nu$ für alle $\nu = 1, 2, \ldots$, so muß $g \leqq 0$ also $[g > 0]$ leer. Wäre nämlich $[g > 0] = b \subseteq a$ und b nicht leer, so gäbe es mindestens ein $a_n b \neq o$ also für die Ortsfunktion f_n die auf a_n gleich Null ist, wäre dann $[g > f_n] = o]$ (Widerspruch!). Die Folge $f_1, f_2, \ldots$ ist aber keine Fundamentalfolge, denn zu beliebigem $0 < \varepsilon < 1$ können wir keine natürliche Zahl n bestimmen, so daß $|f_n - f_{n+\nu}| < \varepsilon$ ist. Wir haben nämlich $f_n = 1$ und $f_{n+\nu} = 0$ auf a_{n+1} für alle $\nu = 1, 2, \ldots$, also $|f_n - f_{n+\nu}| = 1$ und dies gilt für beliebiges n.

(F): Ist $\{f_i\}$ irgendeine Fundamentalfolge aus $\mathfrak{E}^*$, so konvergiert sie offensichtlich auch algebraisch und es gilt: $\lim \operatorname{alg} f_n = \lim f_n$.

(O): Es seien $f_1, f_2, \ldots$ bzw. $g_1, g_2, \ldots$ beliebige algebraisch konvergente Folgen aus $\mathfrak{E}^*$, dann gelten[18]):

1) $\lim \operatorname{alg} f_n \pm \lim \operatorname{alg} g_n = \lim \operatorname{alg} (f_n \pm g_n)$.

2) $\lim \operatorname{alg} f_n \cup$ oder $\cap \lim \operatorname{alg} g_n = \lim \operatorname{alg} (f_n \cup$ oder $\cap\, g_n)$.

3) $\lim \operatorname{alg} f_n . \lim \operatorname{alg} g_n = \lim \operatorname{alg} (f_n g_n)$.

Sind also $\{f_i\}$ und $\{g_i\}$ beliebige Fundamentalfolgen, so existiert stets wegen (F) und (O_3) $\lim \operatorname{alg} f_n g_n$ in $\mathfrak{E}^*$. Wir können also die Produktbildung in $\mathfrak{E}^*$ folgendermaßen erklären: Es seien $f, g \in \mathfrak{E}^*$, $\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{r}'$ die Klasse in $\mathfrak{M}$, die f bzw. g definiert. Wir wählen eine beliebige Fundamentalfolge $\{f_i\}$ in $\mathfrak{r}$ bzw. $\{g_i\}$ in $\mathfrak{r}'$, dann existiert $\operatorname{alg} \lim f_n g_n$ in $\mathfrak{E}^*$. Wir definieren daher: $f . g = \lim \operatorname{alg} f_n g_n$. Das so definierte Produkt ist unabhängig von der Wahl der Folge $\{f_i\}$ in $\mathfrak{r}$ bzw. $\{g_i\}$ in $\mathfrak{r}'$ und steht nicht im Widerspruch zu dem schon für gleichmäßig beschränkte Folgen $\{f_i\}$ und $\{g_i\}$ in § 5 definierten Produkt. Außer-

[18]) CRF. II, § 108 und 115.

dem ändert sich nicht das Resultat der übrigen in § 5 definierten Operationen, wenn wir sie auch durch:

$f \pm g = \lim \mathrm{alg}\,(f_n \pm g_n)$, $f \cup$ oder $\cap\, g = \lim \mathrm{alg}\,(f_n \cup$ oder $\cap\, g_n)$

erklären. —

Wir erwähnen, daß der bekannte Satz von Egoroff für algebraische konvergente Folgen in $\mathfrak{E}^*$ gilt und sich auf Grund unserer Definition der Ortsfunktionen leicht beweisen läßt. Er lautet hier:

Satz von Egoroff. Eine Folge $f_1, f_2, \ldots$ aus $\mathfrak{E}^*$ ist dann und nur dann algebraisch konvergent, wenn es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $x \subseteq a$ mit $\varphi(a + x) < \varepsilon$ gibt, so daß $f_1, f_2, \ldots$ als Ortsfunktionen auf a betrachtet, eine Fundamentalfolge bilden.

Zusätze bei der Korrektur (Dezember 1948).

Bemerkung 1. Die Arbeit wurde 1945 abgeschlossen; aber die Verhältnisse hinderten eine frühere Veröffentlichung. Da ausländische Literatur seinerzeit mir nicht zugänglich war, konnte ich sie nicht berücksichtigen. Neuerdings wurde ich mit zwei Arbeiten bekannt, die sich mit der Definition der Ortsfunktionen beschäftigen*).

Bemerkung 2. Die Voraussetzung, die wir in § 5 machen, daß nämlich die vollkommene Boolesche Algebra (σ-Boolesche Algebra) ein reduziertes Maß trägt, ist in der weiteren Entwicklung der Theorie, mit Ausnahme des Satzes von Egoroff, nicht benutzt, so daß diese Theorie für beliebige σ-Boolesche Algebren gilt.

Bemerkung 3. Bildet man durch die Schränkungstransformation $\sigma(\alpha) = \frac{\alpha}{1 + |\alpha|}$ die Elemente von $\mathfrak{E}'$ in einem bezüglich $\leqq$, und dementsprechend, $\cap$ und $\cup$ isomorphen Verband $\sigma\mathfrak{E}'$, dessen Elemente durch $\sigma f = S(a_i \to \sigma(\alpha_i))$ gegeben sind, bezeichnet man weiter als eine *Fundamentalfolge im weiteren Sinne* jede Folge $\{f_\nu\}$ aus $\mathfrak{E}'$, für die $\{\sigma f_\nu\}$ eine Fundamentalfolge ist und bezeichnet man schließlich mit $\mathfrak{M}_\infty$ die Gesamtheit der Fundamentalfolgen im weiteren Sinne, so ist $\mathfrak{M}_\infty$ ein Oberverband von $\mathfrak{M}$, also $\mathfrak{M}_\infty \mid \mathfrak{N} = \mathfrak{E}^*_\infty$ ein Oberverband von $\mathfrak{E}^*$. In $\mathfrak{E}^*_\infty$ sind aber nicht alle Ortsfunktionen endlich. Die in dieser Weise aus den endlichen einfachen Ortsfunktionen erfolgende Konstruktion des Verbandes aller allgemeinen Ortsfunktionen, also $\mathfrak{E}^*_\infty$, erleichtert die Erklärung der Operationen $\cap, \cup, +, \cdot$ in $\mathfrak{E}^*_\infty$ mit Hilfe von Repräsentanten in $\mathfrak{M}_\infty$. $\mathfrak{E}^*_\infty$ ist isomorph zu dem Verband von Ortsfunktionen, den man durch Somenskalen nach Carathéodory durch geeignete Änderung der Endlichkeitsbedingung II § 6 dieser Arbeit oder nach Gomes erklärt.

*) Olmsted, Lebesgue Theory on a Boolean Algebra, Trans. Am. Math. Soc. 51 (1942) 164—193 und A. P. Gomes; Noção de funcional em espaços sem pontos, Porto 1946. Dort werden die Ortsfunktionen nicht durch Treppenfunktionen, sondern durch Somenskalen erklärt.

(Eingegangen am 5. April 1947.)

51. Band. **Inhalt:** 5. Heft.

Seite

Strubecker, Prof. Dr. K., Karlsruhe, Gneisenaustr. 2: Differentialgeometrie des isotropen Raumes, V. Zur Theorie der Eilinien 525

Heuser, Dr. P., Dieburg, Spitalstr. 29: Zur Theorie der Tschebyscheffschen Polynome 574

Grunsky, Dr. H., Trossingen (Württ.), Tuttlingerstr. 14: Eindeutige beschränkte Funktionen in mehrfach zusammenhängenden Gebieten. III. Ein Einzigkeitssatz 586

Kappos, Dr. D. A., Erlangen, Stafflweg 6, Mathematisches Seminar: Ein Beitrag zur Carathéodoryschen Definition der Ortsfunktionen in Booleschen Algebren 616

Unveränderter Nachdruck 1971
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
Gesamtherstellung: fotokop wilhelm weihert, Darmstadt